

Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

La théorie des nombres ordinaux transfinis peut être envisagée à deux points de vue. Comme généralisation considérable de l'arithmétique cette théorie est de sens philosophique profond et présente par elle-même une des plus belles et des plus intéressantes pages des mathématiques modernes. D'autre part, ses applications ont contribué bien des fois au progrès de différents domaines des mathématiques; c'est, d'ailleurs, au gré de ces applications qu'elle fut développée par G. Cantor.

Dans cet ouvrage je ne traite la théorie des nombres transfinis qu'au point de vue de ses applications et je démontre que les théorèmes d'un certain type général peuvent être prouvés sans faire usage de ces nombres. Ce type général embrasse les théorèmes des diverses disciplines mathématiques les plus connus et les plus importants parmi ceux que l'on démontrait à l'aide des nombres transfinis, malgré que leur énoncé ne contienne guère la notion de ces nombres.

La tendance à éliminer les nombres transfinis des raisonnements qui n'en présentaient que les applications n'est pas nouvelle. Il suffit de citer les ouvrages des MM. Young, Lindelöf, Zermelo, Lebesgue, Sierpiński¹⁾. Cependant les méthodes dont on se

¹⁾ M. Lindelöf dans ses *Remarques sur un théorème fondamental de la théorie des ensembles* (Acta Math. 29, 1905) affranchit des nombres transfinis la démonstration du théorème de Cantor-Bendixson. M. Sierpiński s'occupe d'un problème analogue dans la Note: *Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles de points*, publiée dans le vol. I de ce Journal. M. Young,

servait étaient différentes dans chaque cas particulier. Par contre, le mode d'emploi des nombres transfinis y était partout uniforme en telle mesure que l'on peut en donner un schéma commun. Après avoir défini ce schéma j'établis une méthode générale qui permet de transformer tout procédé représenté par ce schéma en un autre qui ne contient plus de notion des nombres transfinis.

Cette méthode se rattache étroitement à l'idée de chaîne („Kette“) de Dedekind, développée par M. Zermelo dans la seconde démonstration du théorème connu sous son nom et par M. Hessenberg dans son Mémoire *Kettentheorie und Wohlordnung*¹⁾.

Bien que l'emploi des nombres transfinis puisse présenter quelquefois certains avantages au point de vue de la brièveté et de la simplicité, l'existence d'un procédé permettant de supprimer la notion de ces nombres dans les démonstrations des théorèmes qui ne concernent guère le transfini est importante pour les deux raisons suivantes: en raisonnant avec les nombres transfinis on fait implicitement usage de l'axiome de leur existence; or, la réduction du système d'axiomes employés dans les démonstrations est désirable au point de vue logique et mathématique. En outre, cette réduction affranchit les raisonnements de l'élément qui leur est étranger, ce qui augmente leur valeur esthétique.

Du point de vue de la théorie axiomatique des ensembles de M. Zermelo on dirait que la méthode présentée ici permet de déduire les théorèmes appartenant à un type général bien déterminé directement des axiomes de M. Zermelo, c'est à dire, sans qu'on ait besoin d'introduire l'axiome supplémentaire indépendant sur l'existence des nombres transfinis.

Avant d'étudier le schéma général des applications faites des nombres transfinis, envisageons une application particulière. Voici

réussit dans l'Appendix de sa *Theory of Sets of Points* (Cambridge 1906) à définir la classe des „dérivés de tout ordre“ d'un ensemble de points donné sans avoir recours au transfini. Dans les *Math. Ann* 65, 1908 M. Zermelo prouve sans nombres transfinis son fameux théorème, démontré antérieurement (ib. 1904) à l'aide de ces nombres. M. Lebesgue dans son Mémoire *Sur les fonctions représentables analytiquement* (Journ. de Math. 1905) démontre sans nombres transfinis un théorème important sur les fonctions de classe 1, que M. Baire avait prouvé dans sa Thèse (1899) en faisant usage de ces nombres.

¹⁾ *Journ. f. r. u. a. Math.* 135, 1908.

la façon dont on définit d'habitude les cohérences de tout ordre d'un ensemble de points donné:

E désigne l'espace euclidien à n dimensions. X étant un ensemble de points quelconque et X' le dérivé de X , soit $G(X) = X \times X'$. Soit A un ensemble de points donné. On pose 1°: $A_0 = A$, 2°: $A_{\alpha+1} = G(A_\alpha)$ et 3°: lorsque α est un nombre transfini de seconde espèce, $A_\alpha = \prod_{\xi < \alpha} A_\xi$.

On appelle A_α n cohérence d'ordre α de A . La classe $A(A)$ de tous les A_α est ainsi la classe des cohérences de tout ordre de A .

Voici le schéma du procédé décrit tout à l'heure.

Schéma I.

E est un ensemble donné, ses éléments pouvant être de nature complètement arbitraire. La seule hypothèse faite sur E est que pour tout sous-ensemble X de E , $G(X)$ désigne un sous-ensemble de E qui vérifie l'inclusion

$$(1) \quad G(X) \subset X.$$

A est un sous-ensemble donné de E . Sa définition ainsi que celles de l'ensemble E et de la fonction $G(X)$ ne font guère appel aux nombres transfinis.

On pose

$$(2) \quad A_0 = A,$$

$$(3) \quad A_{\alpha+1} = G(A_\alpha),$$

et lorsque α est de seconde espèce:

$$(4) \quad A_\alpha = \prod_{\xi < \alpha} A_\xi,$$

pour tout nombre transfini α .

$A(A)$ désigne la classe de tous les A_α .

Nous appellerons schéma I' le schéma symétrique au premier qui s'en obtient en remplaçant l'inclusion (1) par

$$(5) \quad X \subset G(X)$$

et l'égalité (4) par

$$(6) \quad A_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} A_\xi.$$

Etant donnée une fonction $G(X)$ du schéma I, envisageons les classes Z qui remplissent les conditions:

(7) les éléments de Z sont des sous-ensembles de E ,

(8) $A \in Z$,

(9) $X \in Z$ entraîne $G(X) \in Z$,

(10) $X \subset Z$ entraîne $\Pi X \in Z$ ¹⁾.

Des telles classes Z existent; par exemple, la classe de tous les sous-ensembles de E en est une. Parmi ces classes il existe la plus petite. En effet, leur partie commune est également une classe Z , puisque — comme on montre sans peine — elle satisfait aux conditions (7) — (10). Désignons la par $M(A)$. Nous avons ainsi la définition suivante:

Définition. Étant donné un ensemble E et une fonction $G(X)$ telle que, pour tout sous-ensemble X de E , $G(X)$ est un sous-ensemble de E et vérifie l'inclusion (1), — $M(A)$ désigne, pour chaque sous-ensemble A de E , la plus petite classe Z qui satisfait aux conditions (7) — (10).

Nous définirons, tout pareillement, la classe $N(A)$, en remplaçant dans la définition précédente la condition (1) par (5) et la condition (10) par

(11) $X \subset Z$ entraîne $\Sigma X \in Z$.

L'existence de la classe $N(A)$ peut être établie d'une façon tout à fait analogue.

La méthode d'élimination des nombres transfinis consiste à remplacer dans tout procédé représenté par le schéma I (ou I') la définition de la classe $A(A)$ par celle de $M(A)$ (ou $N(A)$).

Comme il a été aisé de voir, la définition de la classe $M(A)$ ainsi que la démonstration de son existence n'ont point recours aux nombres transfinis. Dans la partie de cet ouvrage consacrée à l'examen des applications faites jusqu'à présent des nombres transfinis, je montre qu'à l'aide de cette méthode et sans avoir à invoquer les

¹⁾ Nous employons les lettres A, B, X, \dots pour désigner des ensembles. Les classes d'ensembles seront désignées — sauf dans le § 7 — par A, B, \dots ΠX est le produit (la partie commune) des ensembles-éléments de X et ΣX est leur somme. En particulier, si la classe X est constituée par une suite $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ nous employons aussi les symboles $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ pour désigner le produit et la somme des éléments de X .

nombres transfinis on parvient aux résultats que l'on établissait d'habitude en s'appuyant sur la notion de ces nombres ¹⁾).

Nous montrerons à présent que $M(A) = A(A)$. La classe $A(A)$ étant définie (dans le schéma I) à l'aide des nombres transfinis, cette égalité ne peut être, bien entendu, établie sans qu'on fasse appel à ces nombres. Toutefois, dans aucun cas individuel, où il sera question d'éliminer les nombres transfinis, nous ne ferons usage de cette égalité; elle n'y interviendra jamais comme prémisse. Le seul motif qui nous contraint de la démontrer ici est, que l'identité $M(A) = A(A)$ nous permet d'affirmer que chaque procédé représenté par le schéma I (ou I') peut être affranchi des nombres transfinis à l'aide de la méthode proposée.

Or, la classe $A(A)$ étant une classe bien ordonnée d'ensembles décroissants, les conditions (7) — (10) sont vérifiées par $A(A)$.

¹⁾ D'ailleurs dans plusieurs cas particulièrement simples on peut éliminer les nombres transfinis directement, sans l'aide de la méthode générale présentée ici. Tel est, par exemple, le cas du raisonnement suivant (Cf. Hausdorff *Grundzüge der Mengenlehre* Leipzig 1914, p. 275).

Soit K une infinité bien ordonnée d'ensembles fermés décroissants; il s'agit de démontrer que la classe K est dénombrable.

Les éléments de cette classe étant rangés en une suite transfinie, désignons par K_α le terme général de cette suite. Soit $\{R_n\}$ la suite de sphères à centre et rayon rationnels. Pour un K_α donné, soit $n(K_\alpha)$ l'indice choisi de manière que 1^o: la sphère $R_{n(K_\alpha)}$ admette de points communs avec K_α mais n'en admette aucun avec les éléments de la classe K précédés par K_α , 2^o: $n(K_\alpha)$ soit le plus petit nombre qui jouit de cette propriété. On voit immédiatement qu'à deux éléments différents de K on fait ainsi correspondre deux nombres naturels différents. La classe K est donc énumérée.

En examinant ce raisonnement on reconnaît sans peine que l'on y peut supprimer les nombres transfinis: il suffit à ce but d'y remplacer K_α par l'ensemble K qui ne fait nullement appel au transfini.

Si on compare ce raisonnement à celui qui nous a servi à construire la classe des cohérences, on y voit la différence essentielle suivante: dans le premier la „chaîne“ (notamment, la classe bien ordonnée K) est donnée par hypothèse, tandis que dans le second elle est à construire (à savoir, la classe $A(A)$). L'application de la méthode générale d'élimination des nombres transfinis n'est nécessaire que lorsque la chaîne n'est pas donnée en avance mais demande d'être construite.

En particulier, le rôle des nombres transfinis dans les raisonnements de M. F. Bernstein sur les ensembles sans parties parfaites (Leipz. Ber. 60), dans ceux de M. Mahlo sur le nombre de „homotes“ (ibid. 63), dans l'article écrit par M. Sierpiński et moi sur les classes (\mathcal{L}) (Fund. Math. II) et dans celui de M. Knaster et moi sur les ensembles connexes (ibid.) — est analogue à leur rôle dans le raisonnement sur la classe K envisagée tout à l'heure.

Donc $A(A)$ est une classe Z et, comme $M(A)$ est, par définition, contenue dans chaque Z , on a $M(A) \subset A(A)$. L'inclusion inverse est également vraie. En effet, d'après (2) et (8), $A_0 \in M(A)$, et si pour tout $\xi < \alpha$ on a $A_\xi \in M(A)$, on en déduit que $A_\alpha \in M(A)$, en s'appuyant sur les conditions (3) et (9) ou (4) et (10), suivant que α est un nombre de première ou seconde espèce. Donc $A(A) = M(A)$.

D'une façon analogue, on montre que la classe $N(A)$ est identique à la classe $A(A)$ du schéma I'.

Nous établirons à présent quelques théorèmes généraux sur les classes $M(A)$ et $N(A)$ auxquels nous aurons souvent recours dans la suite. Les démonstrations de ces théorèmes ne feront nullement intervenir la notion des nombres transfinis et seront basées exclusivement sur les axiomes de M. Zermelo (notamment sur les axiomes I — V).

La propriété la plus importante de la classe $A(A)$ est, qu'elle se prête à l'induction transfinie. Or, il est essentiel pour la méthode exposée ici que l'induction reste valable — bien que sous une forme modifiée — pour tous les raisonnements qui opèrent avec la classe $M(A)$ (ou $N(A)$) au lieu de $A(A)$.

En effet, supposons qu'il s'agisse d'établir une propriété donnée d'éléments de la classe $M(A)$. Le procédé que l'on appliquera est le suivant. On envisage la classe P de tous les sous-ensembles de E qui jouissent de la propriété en question et on démontre que 1°: $A \in P$, 2°: $X \in P$ entraîne $G(X) \in P$ et 3°: $X \subset P$ entraîne $\Pi X \in P$.

La classe P étant ainsi une classe Z assujettie aux conditions (7) — (10), on a, par définition de $M(A)$, $M(A) \subset P$, ce qui veut dire précisément que tous les éléments de $M(A)$ jouissent de la propriété considérée.

Le procédé décrit tout à l'heure — nous l'appellerons encore induction — va intervenir constamment dans la suite. Sa légalité résulte de la définition même de $M(A)$.

Le théorème suivant est donc établi:

Théorème I. *Étant donnée une propriété \mathcal{P} telle que 1°: l'ensemble A la possède, 2°: si X la présente, $G(X)$ la possède également et 3°: si X est une classe d'ensembles à propriété \mathcal{P} , ΠX a aussi cette propriété, tout élément de $M(A)$ jouit de la propriété \mathcal{P} .*

Par raison de symétrie, on appellera *théorème I'* celui que l'on obtient du précédent en y remplaçant ΠX par ΣX et $M(A)$ par $N(A)$.

Voici quelques propriétés importantes de l'ensemble $\Pi \mathcal{M}(A)$.

D'après (10) cet ensemble appartient à la classe $\mathcal{M}(A)$; il y est le plus petit élément. En le désignant par $P(A)$, nous avons, par conséquent: $P(A) \subset M$, pour tout élément M de $\mathcal{M}(A)$. En particulier, selon (8), $P(A) \subset A$. Je dis que

$$(12) \quad P(A) = G(P(A)).$$

En effet, $P(A)$ étant un élément de $\mathcal{M}(A)$, $G(P(A))$ l'est également d'après (9). Par suite $P(A) \subset G(P(A))$, ce qui donne l'égalité (12) en vertu de l'inclusion (1).

Supposons maintenant la fonction $G(X)$ assujettie à la condition

$$(13) \quad X \subset Y \text{ entraîne } P(X) \subset G(Y).$$

Nous montrerons que dans cette hypothèse $P(A)$ est le plus grand ensemble qui, substitué à Z , vérifie les formules:

$$(14) \quad Z \subset A,$$

$$(15) \quad Z = G(Z).$$

Soit donc Z un ensemble qui satisfait à (14) et (15). Il s'agit de démontrer que

$$(16) \quad Z \subset P(A).$$

D'après (15), la classe $\mathcal{M}(Z)$ se réduit au seul élément Z ; donc

$$(17) \quad Z = P(Z).$$

Or soit U un ensemble tel que

$$(18) \quad Z \subset U.$$

Selon (18), (13) et (17), on a

$$(19) \quad Z \subset G(U).$$

L'inclusion (18) entraîne donc (19) pour tout U . On en conclut, en vertu de (14) et du théorème I (\mathcal{P} désignant la propriété d'être sur-ensemble de Z), que tout élément de la classe $\mathcal{M}(A)$ est un sur-ensemble de Z . On a donc, en particulier, l'inclusion (16), c. q. f. d.

En remplaçant la condition (13), par la condition plus restrictive:

$$(20) \quad X \subset Y \text{ entraîne } G(X) \subset G(Y),$$

on déduit immédiatement le théorème suivant:

Théorème II. *Si la fonction $G(X)$ satisfait aux conditions (1) et (20), l'ensemble $P(A)$ (c'est-à-dire, le plus petit ensemble de la classe $M(A)$) est le plus grand sous-ensemble Z de A satisfaisant à l'égalité (15).*

D'une façon analogue, si l'on envisage la fonction $G(X)$ assujettie à la condition (5) et si l'on pose $S(A) = \Sigma N(A)$, $S(A)$ est un Z qui satisfait à (15). Si l'on suppose, de plus, la condition:

$$(21) \quad X \subset Y \text{ entraîne } G(X) \subset S(Y),$$

réalisée, on en conclut que $S(A)$ est le plus petit Z qui contient A et fait partie de E . La condition (20) étant plus restrictive que (21), on en déduit le théorème suivant:

Théorème II'. *Si la fonction $G(X)$ satisfait aux conditions (5) et (21), l'ensemble $S(A)$ (c'est-à-dire, le plus grand ensemble de la classe $N(A)$) est le plus petit sous-ensemble Z de E qui, tout en contenant A , satisfait à l'égalité (15).*

Théorème III¹⁾. *$M(A)$ est une classe d'ensembles décroissants. Autrement dit: X et Y étant deux éléments quelconques de $M(A)$, on a:*

$$X \subset Y \text{ ou bien } Y \subset X.$$

Démonstration. Je démontre ce théorème par l'induction.

Envisageons les éléments K de $M(A)$ qui vérifient la condition:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } X \in M(A) \text{ et } K \subset X, \\ \text{on a pour tout élément } Y \text{ de } M(A): \\ X \subset Y \text{ ou bien } Y \subset G(X). \end{array} \right.$$

Soit K la classe de tous ces K . Je dis qu'elle est une classe Z , qui remplit les formules (8) — (10).

1^o) $A \in K$. Considérons la classe F définie comme suit: $A \in F$ et, si $X \subset G(A)$ et $X \in M(A)$, $X \in F$. Cette classe est évidemment une classe Z , satisfaisant aux conditions (8) — (10). Poursuite (th. I):

$$(23) \quad F = M(A)$$

et A est un K qui satisfait à (22).

¹⁾ Ce théorème est dû à M. Hessenberg (l. c., p. 127). L'énoncé ainsi que la démonstration de ce théorème présentés ici ne diffèrent pas essentiellement de ceux que l'on trouve chez M. Hessenberg.

2°) $K \in \mathcal{K}$ entraîne $G(K) \in \mathcal{K}$. Pour un K donné envisageons la sous-classe G de $M(A)$ qui admet comme éléments les ensembles T satisfaisant à une des deux conditions suivantes:

$$(24) \quad T \supset G(K)$$

$$(25) \quad T \subset G G(K).$$

D'après (23), A est un sur-ensemble de tous les éléments de $M(A)$. Par suite A peut être substitué à T dans la formule (24). Donc

$$(26) \quad A \in G.$$

Soit T un élément quelconque de G . Je dis que $G(T) \in G$.

On remarquera d'abord que lorsque $T = K$ ou $T = G(K)$, on a toujours $G(T) \in G$ en vertu des formules (24) et (25). On peut donc poser:

$$(27) \quad T \neq K,$$

$$(28) \quad T \neq G(K).$$

Deux cas peuvent se présenter, suivant que T satisfait à (24) ou à (25).

Dans le premier cas on a d'après (28): $T \not\subset G(K)$. Donc, — en posant dans (22) $X = K$ et $Y = T$ — on en déduit que $K \subset T$. En posant dans la même formule: $X = T$ et $Y = K$, on a, en vertu de (27): $K \subset G(T)$. Par suite, $G(K) \subset K \subset G(T)$ et $G(T) \in G$, puisque on peut substituer $G(T)$ à T dans (24).

Dans le second cas on a $G(T) \subset T \subset G G(K)$ et, en substituant $G(T)$ à T dans (25), on en déduit que $G(T) \in G$.

Il est ainsi établi que

$$(29) \quad T \in G \text{ entraîne } G(T) \in G.$$

D'autre part,

$$(30) \quad X \subset G \text{ entraîne } \prod X \in G.$$

En effet, si tous les éléments T de X satisfont à (24), il en est de même de leur produit $\prod X$. Dans le cas contraire, au moins un d'eux est un sous-ensemble de $G G(K)$ selon (25). A plus forte raison, $\prod X \subset G G(K)$.

Les formules (26), (29) et (30) entraînent, en vertu du théorème I, l'égalité

$$(31) \quad G = M(A).$$

Il en résulte que $G(K) \varepsilon K$. En effet, soit $X \varepsilon M(A)$ et $G(K) \subset X$. Si, en outre, $K \subset X$, on a d'après (22) pour tout élément Y de $M(A)$: $X \subset Y$ ou bien $Y \subset G(X)$. Dans le cas contraire on déduit de (22) que $X \subset G(K)$, donc que $X = G(K)$ et d'après les formules (31), (24) et (25): $X \subset Y$ ou bien $Y \subset G(X)$. Ainsi on peut en tout cas substituer $G(K)$ à K dans la formule (22).

3°) $U \subset K$ entraîne $\Pi U \varepsilon K$. Désignons par R la sous-classe de $M(A)$ composée de sur-ensembles de ΠU et de sous-ensembles de $G(\Pi U)$.

D'après (23): $A \varepsilon R$.

Soit, d'autre part, $R \varepsilon R$. Si $R = \Pi U$ ou $R \subset G(\Pi U)$, on a $G(R) \subset G(\Pi U)$ d'où $G(R) \varepsilon R$. Posons donc $R \neq \Pi U$ et R non $\subset G(\Pi U)$ donc $R \supset \Pi U$ (en vertu de la définition de R). Je dis qu'il existe au moins un élément K de U tel que $K \subset R$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait d'après (22) (en posant $K = X$ et $Y = R$) pour tout élément K de U : $R \subset G(K) \subset K$, d'où $R \subset \Pi U$ et $R = \Pi U$, contrairement à notre hypothèse.

Or, l'inclusion $K \subset R$ et la formule R non $\subset \Pi U$ impliquent en vertu de (22) (en posant $R = X$ et $Y = \Pi U$): $\Pi U \subset G(R)$, d'où $G(R) \varepsilon R$.

Il est donc établi que la formule $R \varepsilon R$ entraîne $G(R) \varepsilon R$. Enfin: $X \subset R$ entraîne $\Pi X \varepsilon R$. En effet, si tous les éléments de X sont des sur-ensembles de ΠU , il en est de même de leur produit ΠX ; dans le cas contraire, il existe un élément de X qui est sous-ensemble de $G(\Pi U)$; donc, à plus forte raison: $\Pi X \subset G(\Pi U)$. Ainsi, en tout cas $\Pi X \varepsilon R$.

Selon le théorème I,

$$(32) \quad R = M(A).$$

Il en résulte que $\Pi U \varepsilon K$. En effet, soit $X \varepsilon M(A)$ et $\Pi U \subset X$. S'il existe, en outre, un élément K de U tel que $K \subset X$, on peut évidemment substituer ΠU à K dans (22). Dans le cas contraire tous les éléments K de U sont des sur-ensembles de X en vertu de (22); donc $\Pi U \supset X$, d'où $\Pi U = X$ et, en substituant, en vertu de (32), ΠU à K dans (22), on arrive à la formule: $\Pi U \varepsilon K$.

Les conditions 1°—3° établies, il en résulte, selon le théorème I, que tout élément de $M(A)$ est un K satisfaisant à (22). Or, en posant dans (22): $X = K$, on en déduit immédiatement que $M(A)$ est une classe d'ensembles décroissants. De plus,

- (33) X étant un élément quelconque de $M(A)$ il n'existe aucun élément de $M(A)$ qui soit à la fois différent de X et de $G(X)$, tout en étant un sous-ensemble de X et un sur-ensemble de $G(X)$.

En d'autres termes:

- (34) $G(X)$ suit immédiatement X (à moins que X ne soit identique à $G(X)$).

Corollaire I. $M(A)$ est une classe bien ordonnée d'ensembles décroissants¹⁾. Autrement dit: dans toute sous-classe de $M(A)$ il existe l'élément le plus grand; ceci peut s'écrire comme suit:

$$(35) \quad X \subset M(A) \text{ entraîne } \Sigma X \varepsilon X.$$

Démonstration. En effet, si $X \subset M(A)$ et $A \varepsilon X$, c'est évidemment (formule (23)) A qui est le plus grand élément de X . Dans le cas contraire, soit P la classe de tous les ensembles-éléments de $M(A)$ qui renferment ceux de X . Si $\Pi P \varepsilon X$, ΠP est le plus grand élément de X ; si, au contraire, $\Pi P \text{ non-} \varepsilon X$, alors $G(\Pi P) \varepsilon X$ et, d'après (34), $G(\Pi P)$ est un sur-ensemble de tous les autres éléments de X . Donc, en tout cas, $\Sigma X \varepsilon X$.

Par raison de symétrie, on a le

Corollaire I'. $N(A)$ est une classe bien ordonnée d'ensembles croissants.

Ainsi,

$$(36) \quad X \subset N(A) \text{ entraîne } \Pi X \varepsilon X.$$

Envisageons maintenant la classe D de toutes les différences $M - G(M)$, où $M \varepsilon M(A)$. Je dis que

$$(37) \quad A = P(A) + \Sigma D,$$

$P(A)$ désignant, comme toujours, le plus petit élément de la classe $M(A)$.

Pour établir cette formule il suffit de démontrer que, p étant un élément quelconque de $A - P(A)$, il existe dans $M(A)$ un élément $M(p)$ tel que

$$(38) \quad p \varepsilon M(p) \text{ et } p \text{ non-} \varepsilon G(M(p)).$$

¹⁾ On remarquera que le terme „classe bien ordonnée d'ensembles décroissants“ ne fait nullement appel à la notion générale de l'ordre. Je considère ce terme comme défini par la condition (35). Cf. mon article: *Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles* (Fund. Math II).

Or, parmi les M qui ne contiennent pas p , il existe, d'après le corollaire I, le plus grand; désignons le par M_0 . Par hypothèse, $p \notin A$; donc $M_0 \neq A$. De plus, l'ensemble M_0 ne peut être produit d'ensembles plus grands que lui et appartenant à $\mathcal{M}(A)$, car, ceux-ci contenant p , il le contiendrait également. Par définition de $\mathcal{M}(A)$, il existe donc un $M(p)$ tel que $M_0 = G(M(p))$, ce qui prouve que la formule (38) est réalisée.

En outre, pour un p donné il n'existe qu'un seul ensemble $M(p)$ assujéti à la condition (38). En effet, d'après le théorème III, on peut classer les M en deux groupes: sur-ensembles de $M(p)$ et sous-ensembles de $G(M(p))$; l'ensemble $M(p)$ est le plus petit parmi les premiers et $G(M(p))$ est le plus grand parmi les seconds.

Dans le cas particulier, où la classe $\mathcal{M}(A)$ est constituée par une suite $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ ¹⁾, la formule (37) donne la décomposition de A en deux ensembles disjoints

$$(39) \quad A = P(A) + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n - G(M_n)).$$

De plus, pour tout élément p de $A - P(A)$ il n'existe qu'un seul nombre $n(p)$ tel que

$$(40) \quad p \in M_{n(p)} \quad \text{et} \quad p \notin G(M_{n(p)}).$$

Des formules symétriques aux (37) — (40) s'obtiennent, lorsqu'on considère $N(A)$ au lieu de $\mathcal{M}(A)$.

Applications.

§ 1. Le théorème de Zermelo.

M. Zermelo a lui-même affranchi la démonstration de son fameux théorème de la notion des nombres transfinis. Pour démontrer ce théorème en termes de la méthode présentée ici, il suffit de poser, pour tout ensemble E donné:

$$A = E \quad \text{et} \quad G(X) = X - F(X),$$

où $F(X)$ désigne une fonction qui fait correspondre à tout sous-ensemble (non vide) X de E un ensemble composé d'un seul élément de X ; l'existence de cette fonction résulte de l'axiome du choix.

¹⁾ La place que les éléments de $\mathcal{M}(A)$ occupent dans la suite $\{M_n\}$ ne dépend, bien entendu, de leur ordre de décroissance dans $\mathcal{M}(A)$.

Si l'on convient de dire de $p \neq q$ que „ p précède q “ lorsque $M(p) \supset M(q)$, où $M(p)$ et $M(q)$ satisfont à (38), on établit un bon ordre dans E . En effet, d'après (12), on a $P(A) = 0$; on peut donc faire correspondre à chaque p de E un $M(p)$ bien déterminé. De plus, lorsque $p \neq q$, on a $M(p) \neq M(q)$, car

$$M(p) - G(M(p)) = F(M(p)) = (p).$$

D'après le corollaire I, l'ensemble E est donc bien ordonné.

§ 2. Les ensembles saturés et irréductibles. Théorème de M. Brouwer.

Un ensemble est dit, selon Janiszewski¹⁾, *saturé* par rapport à une propriété donnée, s'il la possède et s'il n'est un vrai sous-ensemble d'aucun ensemble qui la possède. Un ensemble est dit *irréductible* par rapport à une propriété, s'il la possède et s'il ne renferme aucun vrai sous-ensemble qui la possède.

Les notions d'ensembles saturés et irréductibles ont été traitées à plusieurs reprises. C'est surtout dans l'Analysis Situs qu'on en faisait usage. Or, le théorème suivant concerne les ensembles dont les éléments sont de nature tout à fait arbitraire:

- (41) *E étant un ensemble à propriété \mathcal{R} , si le produit de toute classe bien ordonnée de sous-ensembles décroissants de E , qui présentent cette propriété, la présente également, — il existe un sous-ensemble de E qui est irréductible par rapport à \mathcal{R} .*

Nous démontrerons ce théorème en utilisant les propriétés de la classe $M(A)$, définie p. 79. Posons, à ce but: $A = E$, et désignons par $G(X)$ (où $X \subset E$) une fonction assujettie aux conditions:

1° si aucun vrai sous-ensemble de X ne jouit de la propriété \mathcal{R} , on a $G(X) = X$,

2° dans le cas contraire, $G(X)$ est un vrai sous-ensemble de X à propriété \mathcal{R} .

L'existence de la fonction $G(X)$ résulte immédiatement de l'axiome du choix.

Je dis que $P(A)$ est l'ensemble irréductible demandé.

¹⁾ *Sur les continus irréductibles entre deux points* p. 7, Journal de l'Ecole Polyt. II, 16, 1912. (Thèse).

Soit P la classe de tous les éléments de $M(A)$ qui possèdent la propriété \mathcal{R} . C'est une classe Z assujettie aux conditions (7) — (10). En effet, si $X \in P$, on a $G(X) \in P$ par définition de $G(X)$. De plus, si $X \subset P$, X est d'après le corollaire I une classe bien ordonnée d'ensembles décroissants; donc, par hypothèse, $\Pi X \in P$.

Selon le théorème I, tout élément de $M(A)$ possède la propriété \mathcal{R} . En particulier, $P(A)$ la possède. En outre, d'après (12), $P(A) = G(P(A))$, ce qui signifie précisément qu'aucun vrai sous-ensemble de $P(A)$ ne présente la propriété \mathcal{R} . $P(A)$ est donc irréductible par rapport à \mathcal{R} .

D'une façon analogue on démontre que

(42) *E étant un ensemble donné et A un sous-ensemble de E à propriété \mathcal{R} ; si la somme de toute classe bien ordonnée de sur-ensembles croissants de A (contenus dans E) à propriété \mathcal{R} est un ensemble à propriété \mathcal{R} , — il existe un sur-ensemble de A qui est saturé par rapport à la propriété d'„être un sous-ensemble de E à propriété \mathcal{R} “.*

Une conséquence immédiate de (41) est fournie par le théorème suivant qui fut signalé par M. Brouwer¹⁾:

Si un ensemble de points E est fermé et possède la propriété \mathcal{R} et si le produit de toute suite simple infinie d'ensembles décroissants à propriété \mathcal{R} présente également cette propriété, — on peut réduire l'ensemble E par une infinité dénombrable d'opérations à un ensemble fermé qui jouisse de la propriété \mathcal{R} , mais dont aucun vrai sous-ensemble fermé n'en jouit plus.

En effet, il suffit de substituer dans (41) à \mathcal{R} la propriété d'„être un ensemble fermé jouissant de \mathcal{R} “.

Or, la classe $M(A)$ considérée tout à l'heure est dans ce cas une classe bien ordonnée d'ensembles fermés décroissants; elle est donc finie ou dénombrable. On parvient ainsi à l'aide de tout au plus \aleph_0 opérations à son dernier élément $P(A)$, qui est bien l'ensemble cherché, puisque il est irréductible par rapport à la propriété d'„être un ensemble fermé à propriété \mathcal{R} “.

M. Zoratti a introduit dans l'Analysis Situs la notion importante de continu irréductible entre deux points, c'est à dire, de continu qui est

¹⁾ *On the structure of perfect sets of points* § 1, Proc. kon. Akad. Wet. te Amsterdam, vol. XIV, 1911.

irréductible par rapport à la propriété d'être un continu et admettre comme éléments deux points donnés a et b ¹⁾. Comme l'a démontré Janiszewski¹⁾, tout continu borné contenant les points a et b renferme un continu irréductible entre ces points. Cette proposition peut être déduite immédiatement de (41), car le produit de toute infinité de continus bornés décroissants est un continu (ou se réduit à un point)²⁾.

§ 3. Classes abstraites de M. Fréchet.

Soit E un ensemble quelconque et supposons que l'on ait défini une fonction $f(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ d'éléments de E de façon que

1° lorsque $e_1 = e_2 = \dots = e_n = \dots = e$, $f(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots) = e$,

2° lorsque $f(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots) = g$, on a pour $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$
 $f(e_{n_1}, e_{n_2}, \dots) = g$.

(D'ailleurs, il peut y avoir des suites $\{e_n\}$ pour lesquelles $f(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ n'existe pas).

On dit, selon M. Fréchet³⁾ que E est une classe (\mathcal{L}) et que $f(e_1, e_2, \dots)$ est la limite de la suite $\{e_n\}$.

Pour tout sous-ensemble X de E convenons de désigner par $G(X)$ l'ensemble composé des limites de toutes les suites extraites de X . Donc $X \subset G(X)$.

La définition suivante de la suite $\{A_\alpha\}$ s'impose de façon naturelle:

Soit A un sous-ensemble donné de E . Posons 1°: $A_0 = A$, 2°: A_α étant défini, $A_{\alpha+1} = G(A_\alpha)$, 3°: α étant un nombre transfini de second genre et A_ξ étant défini pour tout $\xi < \alpha$, $A_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} A_\xi$.

On voit immédiatement que cette définition est une application du schéma I'. Nous allons donc la remplacer par la définition de la classe $N(A)$ (p. 79), la définition de $G(X)$ étant établie tout à l'heure⁴⁾.

¹⁾ C. R. Note du 18 juillet 1910. La démonstration de Janiszewski peut être considérée comme un cas particulier du raisonnement représenté par le schéma I. Le même théorème a été démontré dans la Note du 25 juillet 1910 par M. Mazurkiewicz sans nombres transfinis à l'aide d'un procédé tout à fait différent. Une autre démonstration a été donnée par M. Mazurkiewicz dans le *Bull. de l'Acad. Polonaise*, 1919, p. 44.

²⁾ Janiszewski, Thèse, théorème I p. 20.

³⁾ *Sur quelques points du Calcul Fonctionnel*: Rend. Circ. Mat. di Palermo t. XXII, 1906.

⁴⁾ La fonction $G(X)$ remplit évidemment la condition (20). $S(A)$ est donc —

Nous montrerons à présent que la classe de tous les éléments de $N(A)$ qui précèdent un élément donné N est tout au plus dénombrable, à moins que N ne soit identique à $S(A)$, qui est le dernier élément de la classe $N(A)$ ordonnée selon la grandeur (corollaire I').

En effet, supposons que N_0 soit le plus petit élément de $N(A)$ précédé par une infinité non dénombrable d'éléments de cette classe et qu'en outre $N_0 \neq S(A)$. Or, comme N_0 n'admet évidemment pas d'élément qui le précède immédiatement, il est la somme des éléments qui le précèdent. Comme $N_0 \neq S(A)$, il existe un e tel que $e \in (G(N_0) - N_0)$. Soit donc $\{e_n\}$ une suite d'éléments de N_0 qui „tendent” vers e . Désignons par $N_n (n \geq 1)$ le premier ensemble-élément de $N(A)$ admettant e_n comme élément. Donc $N_n \subset N_0$ et $N_n \neq N_0$; par suite, il n'existe que tout au plus \aleph_0 éléments de $N(A)$ qui précèdent N_n pour un $n \geq 1$. Il en est de même de la somme $I = \sum_{n=1}^{\infty} N_n$. Par conséquent $I \neq N_0$. Mais tous les e_n appartenant à I , leur limite e appartient à $G(I)$. Ceci est en contradiction avec la formule $e \in (G(N_0) - N_0)$, puisque $G(I) \subset N_0$. Notre théorème est donc démontré.

En termes de la théorie des nombres transfinis on dirait que le type d'ordre de la classe $N(A)$ est tout au plus $\Omega + 1$.

§ 4. Dérivés et cohérences.

Comme nous l'avons dit p. 78, la définition de la classe des cohérences de tout ordre d'un ensemble de points A s'obtient du schéma I, en posant

$$(43) \quad G(X) = X \times X'$$

pour tout sous-ensemble X d'un espace euclidien ¹⁾ E .

selon le théorème II' — le plus petit sur-ensemble de A qui satisfait à l'égalité (15). Autrement dit, $S(A)$ est le plus petit sur-ensemble fermé de A . On peut donc considérer $S(A)$ comme une généralisation de l'ensemble A de l'Analysis Situs.

¹⁾ La condition que E soit un espace euclidien n'est nullement essentielle pour les raisonnements du § 4. Ils restent valables lorsque E désigne, par exemple, une classe (\mathcal{E}) normale. Ainsi, la démonstration du théorème Cantor-Bendixson étendu à ces classes par M. Fréchet peut être affranchie des nombres transfinis. (Voir Fréchet, *Les ensembles abstraits et le Calcul Fonctionnel*, Rend. Circ. Mat. di Palermo t. XXX, 1910).

La fonction $G(X)$ étant assujettie à la condition (43), nous appellerons $M(A)$ la classe des cohérences de tout ordre de A . La classe $M(A')$ sera dite la classe des dérivés de tout ordre de A ¹⁾. (Pour se convaincre que la classe $M(A')$ coïncide avec la classe des dérivés d'ordre $\alpha \geq 1$ de A , on aura qu'à remarquer que $G(X) = X'$ lorsque X est fermé).

Les propriétés fondamentales des dérivés et cohérences se déduisent aisément des théorèmes généraux sur les classes M qui ont été établis auparavant. Nous en envisagerons les propriétés les plus connues.

Il résulte du théorème I que tout élément M de la classe $M(A)$ est fermé dans A ²⁾; en effet, si X est fermé dans A , $G(X)$ l'est aussi, puisque $G(X)$ est d'après (43) fermé dans X ; de plus, le produit d'ensembles fermés dans A est également fermé dans A .

En particulier, lorsque A est fermé, les éléments de $M(A)$ le sont aussi. Or, le dérivé de tout ensemble étant fermé, on en déduit que les dérivés de tout ordre, c'est-à-dire tous les éléments de $M(A')$ sont fermés, quel que soit l'ensemble A .

Suivant le corollaire I, $M(A)$ est une classe bien ordonnée d'ensembles décroissants. Comme $G(X)$ est toujours fermé dans X , on peut trouver dans chaque élément $M (\neq P(A))$ de $M(A)$ un point qui n'est pas un point limite des éléments de $M(A)$ succédant à M . On peut, par conséquent ranger les éléments de $M(A)$ en une suite: $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ ³⁾. D'après (39) on a la décomposition:

$$(44) \quad A = P(A) + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n - G(M_n));$$

où $P(A)$ désigne la dernière cohérence. Selon (43), les différences $M_n - G(M_n)$ sont des ensembles isolés.

¹⁾ Cette définition ne diffère presque de celle de M. Young, que nous avons mentionnée p. 77. Il est toutefois à remarquer que M. Young démontre la propriété de la classe des dérivés d'être une classe d'ensemble décroissants en s'appuyant sur plusieurs propriétés spécifiques des dérivés (th. 2, 4, 5) que l'on n'a nullement besoin d'invoquer lorsque on applique le théorème III. L'unique propriété des dérivés dont on doit tenir compte est que $G(X) \subset X$, ce qui résulte immédiatement de la formule (43).

²⁾ X est dit fermé dans Y , lorsque X est le produit de Y par un ensemble fermé.

³⁾ Ceci peut être fait d'une façon bien déterminée selon la règle donné par M. Sierpiński (*Bull. Acad. Polonaise des Sciences*, Juillet 1921).

Remarquons maintenant que, lorsque $X \subset Y$, on a $X' \subset Y'$, d'où $G(X) \subset G(Y)$. D'après le théorème II, l'ensemble $P(A)$ est donc le plus grand sous-ensemble de A qui remplisse l'égalité: $Z = G(Z)$. Selon (43), ceci veut dire précisément que $P(A)$ est le plus grand ensemble dense-en-soi qui fasse partie de A .

Il en résulte que la somme $\sum_{n=1}^{\infty} (M_n - G(M_n))$ ne renferme aucun ensemble dense-en-soi, donc, qu'elle est un ensemble clairsemé.

Lorsque A est fermé, $P(A)$ l'est également, puisque $P(A)$ est toujours fermé dans A . Comme, d'autre part, $P(A)$ est toujours dense-en-soi, on en déduit que — lorsque A est fermé — $P(A)$ est parfait.

Ainsi, pour le cas d'ensemble A fermé, la formule (44) nous fournit une décomposition de A en deux ensembles disjoints dont le premier est parfait et le second est clairsemé.

§ 5. Les ensembles clairsemés et le théorème de Cantor-Bendixson.

D'après le théorème de Cantor-Bendixson, tout ensemble fermé se compose d'un ensemble parfait et d'un ensemble fini ou dénombrable. Ce théorème fut établi tout d'abord à l'aide des nombres transfinis. Plus tard M. Lindelöf — en se basant sur la notion de point de condensation — le démontra sans avoir recours au transfini. Comme le raisonnement de M. Lindelöf faisait appel à l'axiome du choix¹⁾, il était désirable de donner une démonstration qui ne fasse intervenir ni le transfini ni l'axiome du choix. Ce problème fut résolu récemment par M. Sierpiński²⁾.

Il sera, peut-être, intéressant de voir que l'on peut résoudre ce problème en appliquant au raisonnement classique³⁾ la méthode générale d'élimination des nombres transfinis.

Remarquons, à ce but, que — comme nous venons de voir —

¹⁾ Notamment, M. Lindelöf s'appuie sur le théorème d'après lequel la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, théorème que l'on ne sait démontrer sans l'axiome du choix (Voir: *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et, l'Analyse* p. 113, Bull. Acad. Sc. de Cracovie 1919). Ce théorème intervient aussi dans le raisonnement de M. W. H. Young publié dans la Note: *On the Analysis of Linear Sets of Points*, Quart. Journ. of Math. 35, 1903.

²⁾ *Fund. Math.* t. I, p. 1.

³⁾ Cf. *Acta Mathematica* t. 2.

la formule (44) nous fournit une décomposition de l'ensemble fermé A en deux ensembles, dont le premier est parfait et le second est somme d'une suite d'ensembles isolés. Pour en déduire le théorème de Cantor-Bendixson il suffira d'établir une règle générale qui permette de ranger les points d'un ensemble isolé en une suite finie ou infinie.

Or, soit I un ensemble isolé quelconque et soit $R_1, R_2, \dots, R_i, \dots$ la suite des sphères à centre et coordonnées rationnels. Pour tout point p de I il existe un nombre $i(p)$ tel que p soit le seul point de l'ensemble $I \times R_{i(p)}$; supposons, en outre, que $i(p)$ soit le plus petit nombre jouissant de cette propriété. Nous avons assigné ainsi un indice $i(p)$ à tout point p de I ; de plus, le même indice ne peut évidemment être assigné à deux points distincts de I . L'ensemble I est donc rangé en une suite, c. q. f. d.

Quant à la démonstration de M. Sierpiński, il est aisé de voir qu'elle peut être exprimée en termes de la méthode discutée ici.

Comme nous l'avons dit en terminant le § 4, on peut décomposer tout ensemble fermé en un ensemble parfait et un ensemble clairsemé¹⁾. Le problème se réduit donc à démontrer que tout ensemble clairsemé est fini ou dénombrable.

Soit E un ensemble clairsemé. Si $X \subset E$, X est clairsemé; il existe, par conséquent, — si $X \neq 0$ — un nombre $i(X)$ tel que X n'admet qu'un seul point commun avec la sphère $R_{i(X)}$ de la suite $\{R_i\}$ considérée tout à l'heure. Supposons que $i(X)$ soit le plus petit nombre jouissant de cette propriété.

Posons $F(X) = X \times R_{i(X)}$. L'ensemble $F(X)$ se compose d'un seul point, à moins que X ne soit vide; dans ce dernier cas nous poserons $F(0) = 0$. Posons encore

$$(45) \quad G(X) = X + F(E - X),$$

$$(46) \quad A = F(E)$$

et envisageons la classe $N(A)$.

Comme la somme $S(A)$ de tous les éléments de $N(A)$ satisfait à l'égalité (15), on a d'après (45): $S(A) = E$. Il existe donc pour tout point p de $E - A$ un ensemble N_p tel que $p \in (G(N_p) - N_p)$. Suivant (45): $(p) = F(E - N_p)$. Posons donc 1°: $n(a) = 0$ lorsque $a \in A$; 2°: pour $p \in (E - A)$ soit $n(p) = i(E - N_p)$.

Je dis que l'inégalité $p \neq r$ entraîne $n(p) \neq n(r)$. En effet, on a $N_p \neq N_r$ et, si $n(p) = n(r)$, on a $F(E - N_p) = (E - N_p) \times R_{n(p)}$ et $F(E - N_r) = (E - N_r) \times R_{n(r)}$.

¹⁾ D'ailleurs, comme le montre M. Sierpiński, on peut décomposer les ensembles fermés en ensembles parfaits et clairsemés (indépendamment de l'axiome du choix) sans faire intervenir les classes de cohérences et de dérivés.

Mais la classe $N(A)$ étant une classe d'ensembles croissants, on peut poser: $N_p \subset N_r$, ce qui donne $F(E - N_p) \supset F(E - N_r)$. Cette dernière inclusion est absurde, puisque $F(E - N_p) = (p)$ et $F(E - N_r) = (r)$, p et r étant distincts.

Il est ainsi établi que $n(p) \neq n(r)$. Les éléments de E sont donc énumérés.

§ 6. Les résidus et les ensembles qui sont à la fois F_σ et G_δ .

La notion de résidu de même que celle de cohérence conduit à une décomposition importante d'ensembles de points.

X étant un ensemble quelconque, on appelle — selon M. Hausdorff ¹⁾ — *résidu* de X l'ensemble

$$(47) \quad G(X) = X \times \overline{X - X},$$

\overline{X} désignant l'ensemble constitué par X et par ses points limites.

En posant pour un ensemble A donné, 1^o: $A_0 = A$, 2^o: $A_{\alpha+1} = G(A_\alpha)$ et 3^o: lorsque α est de second genre: $A_\alpha = \prod_{\xi < \alpha} A_\xi$, on considère les résidus d'ordre α de A .

Pour parvenir sans l'aide des nombres transfinis à la classe des résidus de tout ordre de A , on n'aura qu'à envisager la classe $M(A)$; E désignant l'espace euclidien.

D'après (47), $G(X)$ est fermé dans X . On en déduit aisément que tous les éléments de $M(A)$ sont des ensembles fermés dans A et que la classe $M(A)$ est formée d'une suite M_1, M_2, \dots . Selon (39), on a

$$(48) \quad A = P(A) + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n - G(M_n)),$$

$P(A)$ désignant le dernier résidu de A .

Plusieurs propriétés intéressantes des résidus ont été établies par M. Hausdorff dans son oeuvre citée. L'élimination des nombres transfinis de ses démonstrations ne présente aucune difficulté. On montre, en particulier, que

1^o: si $P(A) = 0$, on a $P(E - A) = 0$;

2^o: le dernier résidu de l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} (M_n - G(M_n))$ est vide;

3^o: si A est à la fois F_σ et G_δ ²⁾, $P(A) = 0$;

1) *Grundzüge der Mengenlehre* p. 281, Leipzig 1914.

2) Tout ensemble qui est somme d'une suite d'ensembles fermés est dit F_σ . Les complémentaires des ensembles F_σ , c'est-à-dire les produits de suites de domaines ouverts, — sont dits G_δ .

4°: parmi les ensembles fermés dans A , $P(A)$ est le plus grand ensemble qui remplisse l'égalité $X = G(X)$.

Remarquons maintenant que

$$X - G(X) = X - \overline{\overline{X - X}} = \overline{X} - \overline{\overline{X - X}},$$

ce qui montre que l'ensemble $X - G(X)$ est une différence de deux ensembles fermés, ou — autrement dit — produit d'un ensemble fermé et d'un domaine ouvert. L'ensemble $X - G(X)$ est donc somme d'une suite (bien déterminée) d'ensembles fermés. Par conséquent, si on suppose $P(A) = 0$, on déduit de (48) que A est un F_σ ; de plus A peut être mis d'une façon bien déterminée sous la forme de somme d'une suite d'ensembles fermés. L'égalité $P(A) = 0$ implique donc que A est un F_σ effectif.

Il en résulte, selon (1°) et (3°) que:

pour qu'un ensemble soit à la fois F_σ et G_δ il faut et il suffit que son dernier résidu soit vide.

En outre:

tout ensemble qui est à la fois F_σ et G_δ , est un F_σ effectif et un G_δ effectif¹⁾.

En tenant compte de (2°) et (4°), on arrive à la conclusion suivante:

tout ensemble A peut être décomposé d'une seule façon en deux ensembles disjoints dont l'un est fermé dans A et identique à son résidu et l'autre est à la fois F_σ et G_δ .

C'est notamment la formule (48) qui représente cette décomposition.

Nous terminons ce § par un théorème que M. Young avait démontré à l'aide des nombres transfinis²⁾.

Il est aisé de voir que, si p est un point isolé d'un ensemble X , le résidu $G(X)$ ne contient pas ce point. Par suite, aucun ensemble clairsemé (non vide) ne satisfait à la formule $X = G(X)$. De même, aucun sous-ensemble d'un ensemble clairsemé A ne satisfait non plus à cette formule; or, d'après (12): $P(A) = G(P(A))$; donc, $P(A) = 0$. Comme nous l'avons indiqué tout à l'heure, cette dernière égalité implique que A est un F_σ et un G_δ . Nous arrivons ainsi au théorème:

Tout ensemble clairsemé est un G_δ .

¹⁾ Comme l'indique M. Sierpiński, on ne sait pas étendre ce théorème sur le cas d'ensemble qui est F_σ ou bien G_δ (Cf. *Fund. Math.* t. II, p. 114).

²⁾ *The Theory of Sets of Points*, p. 65.

§ 7. Classes de Borel.

La classification d'ensembles mesurables au sens de Borel conduit à la considération des deux suites transfinies de classes:

$$(49) \quad F, F_{\sigma}, F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}, \dots, F_{(\alpha)}, \dots \quad (\alpha < \Omega)$$

$$(50) \quad G, G_{\delta}, G_{\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta}, \dots, G_{(\alpha)}, \dots$$

définies à l'aide des nombres transfinis ¹⁾.

Dans ce § je définis ces suites et j'en indique les propriétés fondamentales sans avoir recours au transfini. D'ailleurs, je n'envisage que la première suite, la seconde étant symétrique par rapport à elle.

Soit E la classe de tous les ensembles de points (d'un espace euclidien) et soit A la classe des ensembles fermés.

X étant une sous-classe quelconque de E , soit $R(X)$ la classe composée des éléments de X et des produits de toute infinité dénombrable d'ensembles-éléments de X ; autrement dit: Y étant une sous-classe finie ou dénombrable arbitraire de X , on a $\prod Y \in R(X)$. Tout pareillement, $T(X)$ désignera la classe des éléments de X et des sommes de ces infinités dénombrables. Posons

$$(51) \quad \begin{cases} \text{lorsque } X = R(X), & G(X) = T(X), \\ \text{,, } X \neq R(X), & G(X) = R(X). \end{cases}$$

La fonction $G(X)$ satisfait évidemment à l'inclusion $X \subset G(X)$. $N(A)$ est bien la famille de toutes les classes F de Borel.

Il est aisé de voir que $R(X) + T(X) \subset GG(X)$. D'autre part, l'inclusion $X \subset Y$ implique $R(X) \subset R(Y)$ et $T(X) \subset T(Y)$, donc $G(X) \subset R(Y) + T(Y) \subset GG(Y)$. Mais $GG(Y) \subset \Sigma N(Y)$; ainsi: $X \subset Y$ implique $G(X) \subset \Sigma N(Y)$ et d'après (21), la classe $S(A)$ de tous les ensembles mesurables (B) est la plus petite classe Z , qui satisfait aux conditions

$$A \subset Z \quad \text{et} \quad Z = G(Z).$$

En d'autres termes:

$$(52) \quad S(A) \text{ est la plus petite des classes qui admettent comme éléments tous les ensembles fermés et en outre, les sommes et les produits de toute infinité dénombrable de ses éléments } ^2).$$

¹⁾ Voir Hausdorff l. c. p. 304.

²⁾ Cf. *ibid.* p. 305.

Nous dirons qu'une classe de Borel N est paire, lorsque $N = R(N)$; dans le cas contraire N sera dite impaire. Les identités évidentes: $RR(X) = R(X)$ et $TT(X) = T(X)$ montrent que les classes paires et impaires se succèdent tour à tour.

Soit maintenant p un ensemble mesurable (B) non fermé et soit $N(p)$ la plus grande classe de Borel qui n'admet pas p comme élément. Donc $p \in G(N(p))$ et p non- $\varepsilon N(p)$. Il existe, par conséquent, une suite

$$(53) \quad p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$$

d'ensembles-éléments de $N(p)$ tels que

$$(54) \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad \text{ou bien} \quad p = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

suivant que la classe $N(p)$ est paire ou impaire.

Nous montrerons par induction que

$$(55) \quad N' \text{ étant une classe de Borel, les conditions } p \in N \text{ et } r \in N \text{ entraînent } (p + r) \in N \text{ et } (p \times r) \in N.$$

Soit P la famille des classes de Borel qui satisfont à la condition (55).

Or, la somme et le produit de deux ensembles fermés étant fermés, on a

$$(56) \quad A \in P.$$

Soit, d'autre part, $X \in P$. Je dis que $G(X) \in P$. En effet, p et r étant deux éléments arbitraires de $G(X)$, il existe deux suites d'éléments de X : $\{p_n\}$ et $\{r_n\}$ telles que

$$(57) \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad \text{et} \quad r = \sum_{n=1}^{\infty} r_n$$

ou bien

$$(58) \quad p = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad \text{et} \quad r = \prod_{n=1}^{\infty} r_n,$$

suivant que la classe X est paire ou impaire.

Dans le premier cas, on a: $p + r = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n + r_n)$, et comme par hypothèse, $(p_n + r_n) \in X$, on en déduit que $(p + r) \in G(X)$.

En même temps,

$$p \times r = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \times \sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \times r_n,$$

ce qui entraîne, en vertu de $(p_n \times r_m) \in X$, que $(p \times r) \in G(X)$.

Ainsi, la condition (57) implique que $G(X) \in P$. D'une façon tout à fait analogue on montre qu'il en est de même de la condition (58). Nous pouvons donc affirmer que

$$(59) \quad X \in P \text{ entraîne } G(X) \in P.$$

Nous montrerons que

$$(60) \quad X \subset P \text{ entraîne } \Sigma X \in P.$$

Soient p et r deux éléments quelconques de ΣX . La classe X étant une classe d'ensembles croissants, il existe un élément V de X tel que $p \in V$ et $r \in V$. Par définition de X , on a $(p+r) \in V$ et $(p \times r) \in V$; à plus forte raison: $(p+r) \in \Sigma X$ et $(p \times r) \in \Sigma X$, ce qui prouve la formule (60).

Les formules (56), (59) et (60) établies, on déduit du théorème I' la formule (55).

Nous avons démontré auparavant que tout ensemble p non fermé et mesurable au sens de Borel est la somme ou le produit d'une suite $\{p_n\}$ d'ensembles-éléments de $N(p)$. En s'appuyant sur (55), on peut supposer cette suite assujettie à l'une des deux conditions:

$$p_1 \subset p_2 \subset p_3 \subset \dots \text{ ou bien } p_1 \supset p_2 \supset p_3 \supset \dots,$$

suivant que p soit la somme ou le produit de $\{p_n\}$.

En procédant d'une façon analogue, on pourrait éliminer les nombres transfinis des démonstrations des autres théorèmes sur les classes de Borel. Ainsi, par exemple, il n'y a aucune difficulté à éliminer les nombres transfinis de la démonstration du théorème de M. Lebesgue sur l'existence d'une infinité non dénombrable de classes de Borel ou de celle du théorème de MM. Hausdorff et Alexandroff sur la puissance d'ensembles mesurables (B).

§ 8 Fonctions de Baire.

La classification d'ensembles mesurables au sens de Borel est étroitement liée à celle de fonctions due à M. Baire. Une fonction est, d'après M. Baire, de classe $\alpha > 0$ lorsque elle est limite de

fonctions de classe $< \alpha$ et n'est pas elle-même de classe $< \alpha$. Les fonctions continues sont de classe 0.

La même méthode d'élimination des nombres transfinis nous permet d'obtenir cette classification de fonctions sans avoir recours au transfini.

Posons, en effet,

E = la classe de toutes les fonctions (réelles à n variables réelles),

A = la classe des fonctions continues,

si $X \subset E$. $G(X)$ = la classe de fonctions limites de suites extraites de la classe X .

Envisageons la classe $N(A)$. Pour en déduire la classification de M. Baire, il suffit de considérer la classe B qui admet comme éléments la classe A et toutes les différences $G(N) - N$, où $N \in N(A)$.

On reconnaît sans peine que la fonction $G(X)$ est assujettie à la condition:

$$X \subset Y \text{ implique } G(X) \subset G(Y).$$

D'après le théorème II', la classe $S(A)$ de toutes les fonctions de Baire est donc la plus petite classe qui admet comme éléments toutes les fonctions continues et, en outre les fonctions-limites de toutes les suites extraites de cette classe¹⁾.

L'élimination des nombres transfinis des applications faites de la classification en question ne comporte guère de difficultés. En particulier, la classe E étant évidemment une classe (\mathcal{L}) au sens de M. Fréchet, la puissance de la classe $N(A)$ ne dépasse pas \aleph_1 (voir p. 91); d'autre part — comme le montre M. Lebesgue — cette puissance est $\geq \aleph_1$. Donc, la puissance de $N(A)$ ainsi que celle de B est \aleph_1 .

§ 9. »Problème de Baire« et »problème auxiliaire« de M. de la Vallée Poussin.

Pour toute fonction f de classe 1 il existe au moins une suite $\{f_n\}$ de fonctions continues qui tendent vers f . Comme il peut en exister plusieurs, le problème suivant s'impose:

¹⁾ Cf. Sierpiński, *L'axiome de M. Zermelo...* p. 137.

étant donnée une fonction f de classe 1, construire une suite bien déterminée $\{f_n\}$ de fonctions continues qui tendent vers f quand n tend vers l'infini¹⁾.

C'est le problème, que M. de la Vallée Poussin²⁾ appelle „problème de Baire“.

M. Baire résolut ce problème à l'aide des nombres transfinis. En analysant la même question, M. de la Vallée Poussin est parvenu à l'opinion suivante à ce sujet: „il semble bien que la résolution du problème ne puisse se passer de l'intervention du transfini, et le transfini joue effectivement un rôle essentiel dans le raisonnement de M. Baire“³⁾.

Dans ce § je donne une résolution du problème de Baire sans faire le moindre usage des nombres transfinis. D'ailleurs, comme M. Baire⁴⁾ se sert des nombres transfinis de la façon décrite dans le schéma I, je n'aurai, pour parvenir à mon but, qu'à appliquer la méthode générale d'élimination des nombres transfinis sans altérer l'idée directrice du raisonnement de M. Baire.

Nous allons résoudre au préalable le problème suivant:

Étant donnés une fonction f bornée et ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait et un nombre $\sigma > 0$, —

1° définir une fonction F qui diffère de f de moins de σ ;

2° définir une fonction $\varphi(\Delta)$ qui fait correspondre à tout carré Δ un nombre φ assujéti à la condition suivante: pour tout point p et tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un cercle C de centre p tel que, pour tout carré Δ contenant p à son intérieur, l'inclusion $\Delta \subset C$ entraîne l'inégalité $|\varphi(\Delta) - F(p)| < \varepsilon$.

¹⁾ D'après les dénominations de M. F. Bernstein il ne s'agit donc pas de „Existenz“ de la suite $\{f_n\}$, mais bien de sa „Herstellung“ (Cf. *Zur Theorie der trigonometrischen Reihen*, Leipz. Ber. 60, 1908). En termes de M. Sierpiński on dirait qu'il s'agit de démontrer que toute fonction de classe 1 est effectivement de cette classe.

²⁾ *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, chap. VII Paris 1916.

³⁾ Ibid. p. 107.

⁴⁾ Le problème en question a été résolu pour le cas de fonction de variable réelle par M. Baire dans sa Thèse publiée en 1899. La généralisation de cette solution fut traitée plus tard à plusieurs reprises. Le raisonnement, que j'envisage ici, se trouve dans les *Leçons sur les fonctions discontinues* (Paris 1905) de M. Baire. Il est valable pour le cas général, où f est une fonction définie sur un ensemble parfait de points d'un espace à n dimensions. D'ailleurs, pour simplifier les notations, je considère f définie dans tous les points du plan.

E désignant le plan, nous définirons la fonction $G(X)$ comme suit:

(61) si X est un sous-ensemble parfait de E , $G(X) =$ l'ensemble de points de X où l'oscillation de f relativement à X est $\geq \sigma$

(62) si X est fermé sans être parfait, $G(X) = X'$ (= le dérivé de X);

(pour étendre la définition de $G(X)$ au cas où X est un sous-ensemble quelconque de E , on posera $G(X) = X$ lorsque X n'est pas fermé; d'ailleurs, dans tout le raisonnement il ne sera question que de X fermés).

Posons $E = A$ et envisageons la classe $M(A)$ définie p. 79.

D'après (61) et (62), si X est fermé, $G(X)$ l'est également. On déduit donc immédiatement du théorème I que tous les éléments de $M(A)$ sont des ensembles fermés. Comme, en outre, $M(A)$ est une classe bien ordonnée d'ensembles décroissants (corollaire I), on peut ranger ses éléments (d'une façon bien déterminée) en une suite $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$, n étant naturel.

$P(A)$ désignant le plus petit élément de la classe $M(A)$, on a, selon (12), $P(A) = G(P(A))$. D'après (62), cette identité ne pourrait avoir lieu si $P(A)$ était fermé sans être parfait. D'autre part, si $P(A)$ est parfait, elle n'est réalisée (selon (61)) que lorsque $P(A) = 0$, car, par hypothèse, f est ponctuellement discontinue sur $P(A)$.

Il est donc établi que $P(A) = 0$. D'après (39):

$$(63) \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} (M_n - G(M_n))$$

et d'après (40), il existe, pour tout point p de A , un indice $n(p)$ bien déterminé tel que

$$(64) \quad p \in M_{n(p)} \quad \text{et} \quad p \notin G(M_{n(p)}).$$

Soit, d'autre part, Δ un carré donné; envisageons les ensembles-éléments de $M(A)$ qui renferment des points de Δ . Les ensembles $M_n \times \Delta$ étant évidemment fermés et bornés, il existe le plus petit M_n , soit $M_{n(\Delta)}$, qui a encore des points communs avec Δ ¹⁾. L'ensemble $P(A)$ étant vide, on a

$$(65) \quad \Delta \times M_{n(\Delta)} \neq 0 \quad \text{et} \quad \Delta \times G(M_{n(\Delta)}) = 0.$$

¹⁾ Je m'appuie sur la propriété suivante d'ensembles fermés, établie par M. Sierpiński (*Bull. Acad. Sc. Cracovie* 1918, p. 51): le produit d'une infinité d'ensembles (non vides) fermés et bornés décroissants n'est jamais vide. C'est un généralisation du „Durchschnittsatz“ de Cantor.

Voici la définition des fonctions F et φ :

$$(66) \quad F(p) = m(M_{n(p)}, p) \quad \text{et} \quad \varphi(\Delta) = m(\Delta \times M_{n(\Delta)}),$$

où $m(M_{n(p)}, p)$ désigne le minimum de la fonction f au point p relativement à l'ensemble $M_{n(p)}$, et $m(\Delta \times M_{n(\Delta)})$ désigne le minimum de f relativement à l'ensemble $\Delta \times M_{n(\Delta)}$.

Pour se convaincre que F et φ sont bien les fonctions cherchées, envisageons deux cas:

1) $M_{n(p)}$ n'est pas parfait. D'après (64) et (62), p est un point isolé de $M_{n(p)}$; donc $m(M_{n(p)}, p) = f(p)$ et d'après (66): $F(p) = f(p)$.

De plus, C étant un cercle de centre p ne contenant outre p aucun point de $M_{n(p)}$, on a pour tout Δ contenu dans C et contenant p : $\Delta \times M_{n(p)} = (p)$ et $\Delta \times G(M_{n(p)}) = 0$; donc $n(p) = n(\Delta)$ et $\Delta \times M_{n(\Delta)} = (p)$, d'où: $m(\Delta \times M_{n(\Delta)}) = f(p) = F(p)$.

Les conditions du problème sont donc réalisées.

2) $M_{n(p)}$ est parfait. D'après (64) et (61) l'oscillation de f au point p relativement à $M_{n(p)}$ est $< \sigma$, donc: $m(M_{n(p)}, p) - f(p) < \sigma$ et $F(p) - f(p) < \sigma$.

L'ensemble $G(M_{n(p)})$ étant fermé, on peut entourer p d'un cercle C assujéti aux conditions:

$$(67) \quad C \times G(M_{n(p)}) = 0,$$

$$(68) \quad m(C \times M_{n(p)}) > m(M_{n(p)}, p) - \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné d'avance.

D'après (67): si p est un point intérieur de Δ et $\Delta \subset C$, on a, en vertu de (65), $n(p) = n(\Delta)$, d'où $\varphi(\Delta) = m(\Delta \times M_{n(p)})$. Mais

$$m(M_{n(p)}, p) \geq m(\Delta \times M_{n(p)}) \geq m(C \times M_{n(p)}).$$

Par conséquent $|\varphi(\Delta) - F(p)| < \varepsilon$ selon (68), c. q. f. d.

Les problèmes 1° et 2° sont donc résolus.

Pour en déduire la solution du problème de M. Baire, on a qu'à suivre la voie de son raisonnement sans y introduire aucune modification.

En effet, d'après 1° on peut pour une fonction f de classe 1 et un nombre naturel n construire une fonction $F^{(n)}$ qui diffère de f de moins de $\frac{1}{n}$ (on pose: $\sigma = \frac{1}{n}$).

Soit, d'autre part, pour un m donné, $p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \dots, p_1^{(m)}, \dots$ la suite

de points dont les coordonnées sont de la forme $\frac{k}{2^m}, \frac{l}{2^m}$, k et l étant naturels. Remplaçons dans 2° la fonction F par $F^{(n)}$. La fonction $\varphi_n(\Delta)$ définie, posons $F_m^{(n)}(p_i^{(m)}) = \varphi_n(\Delta)$ pour $i=1, 2, \dots$, où Δ est le carré de centre $p_i^{(m)}$ et de côté $\frac{1}{2^{m-1}}$. Pour compléter la définition de $F_m^{(n)}$ aux autres points du plan, on supposera la fonction $F_m^{(n)}$ linéaire par rapport à chacune des variables dans chaque carré à côté $\frac{1}{2^m}$ qui a pour sommets des points de la suite $\{p_i^{(m)}\}$. On montre ¹⁾ aisément que la fonction $F_m^{(n)}$ est continue et que $F^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m^{(n)}$.

Nous sommes ainsi en présence d'une suite double de fonctions continues:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \dots, F_m^{(1)}, \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_1^{(n)}, F_2^{(n)}, \dots, F_m^{(n)}, \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

La suite de fonctions $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots$ étant uniformément convergente vers f , on en déduit — suivant un procédé indiqué par M. Baire ²⁾ — la définition d'une suite de fonctions continues qui tendent vers f .

M. de la Vallée Poussin a démontré que lorsqu'on connaît la solution d'un problème, qu'il nomma problème auxiliaire, on peut en déduire sans faire appel aux nombres transfinis la solution du problème de Baire. Cependant il résolut le problème auxiliaire même à l'aide du transfini.

En appliquant au procédé de M. de la Vallée Poussin la méthode d'élimination des nombres transfinis, je parviens à résoudre le problème auxiliaire et, partant, le problème de Baire sans l'usage de ces nombres.

Voici le „problème auxiliaire“ ³⁾:

Etant donné un ensemble parfait A et une suite E_1, E_2, E_3, \dots d'ensembles assujettis aux conditions:

1°: $A \subset E_1 + E_2 + E_3 + \dots;$

2°: *pour tout sous-ensemble parfait (non vide) D de A il existe un E_n tel que $(D - E_n)' \neq D$; (autrement dit: l'un au moins des E_n contient un point „relativement intérieur par rapport à D “)* —

¹⁾ Baire l. c. p. 116.

²⁾ Ibid. p. 111.

³⁾ De la Vallée Poussin, l. c. p. 114.

définir une suite d'ensembles H_1, H_2, H_3, \dots qui remplissent les conditions:

- 1°: pour tout n on a $H_n \subset E_n$;
- 2°: les ensembles H_n sont des F_σ effectifs (c'est à dire: ils sont donnés sous la forme de sommes de suites infinies d'ensembles fermés);
- 3°: pour tous deux m et n on a $H_m \times H_n = 0$;
- 4°: $A = H_1 + H_2 + H_3 + \dots$

Solution du problème auxiliaire. X étant un ensemble de points quelconque, soit $B(X)$ le plus grand sous-ensemble dense-en-soi de X . Soit

$$(69) \quad V_n(X) = E_n \times X - (X - E_n)',$$

$$(70) \quad G(X) = B(X - \sum_{n=1}^{\infty} V_n(X)).$$

Envisageons la classe $M(A)$ (où $E = A =$ le plan).

D'après (69):

$$X - V_n(X) = (X - E_n \times X) + X \times (X - E_n)' = X \times \overline{X - E_n}.$$

Par conséquent, si X est fermé, il en est de même de $X - V_n(X)$ et de $X - \sum_{n=1}^{\infty} V_n(X)$; donc, selon le théorème de Cantor-Bendixson¹⁾, $B(X - \sum_{n=1}^{\infty} V_n(X))$ est parfait. Il est ainsi établi que, si X est fermé, $G(X)$ l'est aussi. Il en résulte — d'après le théorème I — que tous les éléments de $M(A)$ sont des ensembles fermés et — d'après le corollaire 1 — que l'on peut les ranger en une suite $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ (i étant naturel).

Posons, pour un i donné:

$$(71) \quad \begin{cases} Y_i^{(1)} = V_1(M_i) \\ \text{et pour } n > 1 \\ Y_i^{(n)} = V_n(M_i) - [V_1(M_i) + V_2(M_i) + \dots + V_{n-1}(M_i)], \end{cases}$$

$$(72) \quad C_i = M_i - [\sum_{n=1}^{\infty} V_n(M_i) + G(M_i)],$$

$$(73) \quad \begin{cases} Z_i^{(1)} = C_i \times E_1 \\ \text{et pour } n > 1: \\ Z_i^{(n)} = C_i \times E_n - (E_1 + E_2 + \dots + E_{n-1}). \end{cases}$$

Soit, pour un n donné:

$$(74) \quad H_n = \sum_{i=1}^{\infty} (Y_i^{(n)} + Z_i^{(n)}).$$

Nous montrerons que les ensembles H_n sont bien les ensembles cherchés.

1) D'après (71) et (69): $Y_i^{(n)} \subset V_n(M_i) \subset E_n$, et d'après (73): $Z_i^{(n)} \subset E_n$.

Donc $H_n \subset E_n$.

2) Les ensembles $V_n(M)$ étant des domaines ouverts par rapport à l'ensemble fermé M_i , on reconnaît aisément qu'ils sont des F_σ et G_δ effectifs. Il en résulte — d'après (71) — que les $Y_i^{(n)}$ sont des F_σ effectifs.

¹⁾ Voir p. 94

D'autre part, les ensembles C_i sont clairsemés, car selon (72) et (70):

$$C_i = [M_i - \sum_{n=1}^{\infty} V_n(M_i)] - B[M_i - \sum_{n=1}^{\infty} V_n(M_i)].$$

Mais, d'après (73): $Z_i^{(n)} \subset C_i$. Les ensembles $Z_i^{(n)}$ sont donc, à plus forte raison, clairsemés et les éléments de chacun d'eux peuvent être rangés en une suite bien déterminée (voir p. 94).

Ainsi, l'ensemble H_n — étant une somme d'une suite d'ensembles F_{ij} effectifs — est lui-même un F_{σ} effectif.

3) Soit $m \neq n$. Selon (74):

$$(75) \quad H_n \times H_m = \sum_{\substack{i=1 \\ k=1}}^{\infty} (Y_i^{(n)} \times Y_k^{(m)} + Y_i^{(n)} \times Z_k^{(m)} + Z_i^{(n)} \times Y_k^{(m)} + Z_i^{(n)} \times Z_k^{(m)})$$

Si $i=k$, les quatre sommandes de l'égalité (75) deviennent vides, en vertu de (71) et (73). Soit donc $i \neq k$. La classe $M(A)$ étant une classe d'ensembles décroissants, on peut poser $M_k \subset G(M_i)$ (voir formule (34)). Or, d'après (70),

$G(M_i) \times \sum_{n=1}^{\infty} V_n(M_i) = 0$ et, à plus forte raison, $M_k \times Y_i^{(n)} = 0$. Comme $Y_k^{(m)} \subset M_k$ et $Z_k^{(m)} \subset M_k$, on en déduit que

$$(76) \quad Y_i^{(n)} \times Y_k^{(m)} = 0 = Y_i^{(n)} \times Z_k^{(m)}.$$

D'autre part, selon (72), $C_i \times G(M_i) = 0$, d'où $C_i \times M_k = 0$ et

$$(77) \quad Z_i^{(n)} \times Y_k^{(m)} = 0 = Z_i^{(n)} \times Z_k^{(m)}.$$

Les formules (75)–(77) impliquent: $H_n \times H_m = 0$.

4) $P(A)$ désignant le dernier élément de la classe $M(A)$, on a (d'après (12)): $P(A) = G(P(A))$. L'ensemble $P(A)$ étant fermé, cette identité n'a lieu que lorsque $P(A)$ est parfait. Or, si $P(A)$ n'était pas vide, on aurait par hypothèse:

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n(P(A)) \neq 0 \quad \text{et} \quad P(A) \neq G(P(A)).$$

Il est donc établi que $P(A) = 0$. Selon (39):

$$(78) \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} (M_n - G(M_n)).$$

Nous montrerons que $A = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$. Soit $p \in A$. D'après (78), il existe un indice $i(p)$ tel que $p \in [M_{i(p)} - G(M_{i(p)})]$. Selon (72), on a donc $p \in C_{i(p)}$ ou bien $p \in \sum_{n=1}^{\infty} V_n(M_{i(p)})$ et comme, suivant (71) et (73), $C_{i(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{i(p)}^{(n)}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} V_n(M_{i(p)}) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{i(p)}^{(n)}$, on en déduit que $p \in \sum_{n=1}^{\infty} (Y_{i(p)}^{(n)} + Z_{i(p)}^{(n)})$ et $p \in \sum_{n=1}^{\infty} H_n$.

Donc: $A \subset \sum_{n=1}^{\infty} H_n$. Comme, d'autre part, $Y_i^{(n)} \subset M_i \subset A$ et $Z_i^{(n)} \subset M_i \subset A$.

ou a $\sum_{n=1}^{\infty} H_n \subset A$ et finalement: $A = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$, c. q. f. d.

§ 10 Les ensembles (A) de M. Souslin.

Les nombres transfinis jouent un rôle important dans la théorie des ensembles (A) de M. Souslin¹⁾. Suivant la remarque que M. Saks a bien voulu me communiquer, cette théorie peut également être affranchie du transfini à l'aide de la même méthode générale, qui est discutée ici.

Supposons que l'on ait fait correspondre à chaque système fini n_1, n_2, \dots, n_k de nombres naturels un intervalle $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ de façon que

$$\delta_{n_1} \supset \delta_{n_1, n_2} \supset \delta_{n_1, n_2, n_3} \supset \dots$$

Soit E la famille de tous ces $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et D l'ensemble défini comme suit: pour que le point p appartienne à D il faut et il suffit qu'il existe une suite infinie n_1, n_2, n_3, \dots , telle que p appartienne au produit $\delta_{n_1} \times \delta_{n_1, n_2} \times \delta_{n_1, n_2, n_3} \times \dots$.

Soit x un point qui n'est pas contenu dans D . On dit que l'intervalle δ_{n_1, \dots, n_k} a l'indice 0 par rapport à x , lorsque x n'appartient pas à cet intervalle²⁾. Si x lui appartient, on appellera indice de δ_{n_1, \dots, n_k} le plus petit nombre (fini ou transfini) supérieur aux indices des intervalles $\delta_{n_1, \dots, n_k, n}$, où n admet toutes les valeurs naturelles.

En rangeant dans la même classe les intervalles qui ont le même indice (par rapport à x) on arrive à une classification de ces intervalles. Nous l'obtiendrons sans l'aide des nombres transfinis.

Étant donné un point x qui n'appartient pas à D , soit A_x l'ensemble de tous les intervalles de E qui ne contiennent pas x . Si $X \subset E$, on posera $\delta_{n_1, \dots, n_k} \in G(X)$, lorsque $\delta_{n_1, \dots, n_k} \in X$ ou bien lorsque pour tout n on a $\delta_{n_1, \dots, n_k, n} \in X$.

La fonction $G(X)$ étant définie de la sorte, envisageons la classe $N(A_x)$. C'est une classe bien ordonnée d'ensembles croissants. Or, comme E est dénombrable, la classe $N(A_x)$ est tout au plus dénombrable.

¹⁾ N. Lusin et W. Sierpiński: Sur quelques propriétés des ensembles (A) *Bull. Acad. Sc. Cracovie* .1918.

²⁾ Ibid. p. 37.

Nous montrerons que tout intervalle appartenant à E , appartient tout au moins à un ensemble-élément de $N(A_x)$.

Supposons, par contre, qu'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire, qu'il existe un $\delta_{n_1 \dots n_k}$ non- $\varepsilon S(A_x)$. Or, si pour tout n naturel, $\delta_{n_1 \dots n_k n}$ appartenait à $S(A_x)$, il existerait une suite N_1, N_2, N_3, \dots d'éléments de $N(A_x)$ telle que

$$\delta_{n_1 \dots n_k n} \in N_n.$$

En posant $T = \sum_{n=1}^{\infty} N_n$ on aurait donc $\delta_{n_1 \dots n_k} \in G(T)$, contrairement à l'hypothèse. Il en résulte l'existence d'un tel n_{k+1} que $\delta_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$ non- $\varepsilon S(A_x)$.

L'itération de ce raisonnement conduit à une suite d'intervalles

$$\delta_{n_1 \dots n_k}, \delta_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}, \delta_{n_1 \dots n_k n_{k+1} n_{k+2}}, \dots$$

dont aucun n'appartient à $S(A_x)$ et — à plus forte raison — à A_x . Tous ces intervalles admettent donc, par définition de A_x , le point x comme élément. Mais ceci implique que x appartient à leur produit et, par conséquent, à D , ce qui contredit notre hypothèse.

Il est ainsi établi que chaque intervalle $\delta_{n_1 \dots n_k}$ appartient à un ensemble-élément de $N(A_x)$. Soit Q la classe qui a pour élément: 1° l'ensemble A_x , 2° toutes les différences $G(N) - N$, où $N \in N(A_x)$. On reconnaît sans peine que Q établit la même classification d'intervalles que la classification faite avec les „indices“.

Soient maintenant x et y deux points quelconques qui n'appartiennent pas à D . Nous allons les ranger dans un même ensemble, lorsque les classes $N(A_x)$ et $N(A_y)$ sont ordonnées semblablement (par rapport à la relation \subset). Il est bien évident que les ensembles ainsi formés coïncident avec ceux qui renferment les points à un même „ $Ind_x E^u$ “¹⁾. On pourrait en déduire aussi la classification d'ensembles de points correspondante à celle qui a été faite à l'aide de la notion „ $Ind_x E^u$ “²⁾.

¹⁾ Ibid. p. 38.

²⁾ Ibid. p. 39.