Analogies entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques.

Par

N. Lusin (Paris).

Il y a une réelle analogie entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques les plus généraux. L'essence de cette analogie consiste à ce qu'*on peut considérer tout ensemble analytique non mesurable B comme un ensemble mesurable B de classe α, la lettre α désignant un nombre trasfini* indéterminé *de seconde classe* „extrêmement grand" *de manière qu'il échappe à tout mode de représentation finie* [1]).

Cet énoncé, auquel on se trouve naturellement conduits lorsqu'on suit les ideées de M. Emile Borel, paraîtra sans doute vague ou même dénué de sens au lecteur trop habitué aux raisonnements des idéalistes: mais l'une des idées que nous serions très heureux de faire acquérir à ceux qui s'intéressent à la théore contemporaine des fonctions, c'est que, dans toutes les questions où intervient le *transfini* ou des *définitions négatives*, il ne faut pas craindre des raisonnements qui semblent être „vagues" au point de vue de la logique abstraite: rien n'est plus dangereux qu'en suivant les voies de la logique abstraite de se payer de stérilité et de perdre des propositions fructueux obligatoires pour tout le monde, les idéalistes inclus. C'est ce que nous allons constater en observant les faits.

Voici ces faits: il y a, dans la théorie des ensembles mesurables B et des ensembles analytiques. une espèce de dualité qui est en

[1]) Au lieu de la lettre α, on pourrait écrire la lettre Ω par laquelle les idéalistes désignent habituellement ce qu'il appellent ***le plus petit nombre de troisième classe***. En effet, le seul rôle que joue en réalité cette notion c'est simplement servir à l'exprimer l'idée que l'Analyse classique appellait toujours par le nom „l'infini".

quelque sorte analogue à celle que nous trouvons dans la Géométrie projective. Pour préciser cette dualité, il est commode d'introduire la définition suivante: *Nous dirons qu'un ensemble de points E de classe quelconque α de la classification de MM.* Baire- de la Vallée Poussin *est un* élément de classe α *si E est la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ de classes inférieures à α, et si cela est impossible pour son complémentaire CE.* On démontre sans aucune difficulté qu'il existe effectivement des éléments dans toute classe de la classification de MM. Baire- de la Vallée Poussin.

Cette définition étant posée, voici comment on peut énoncer la dualité indiquée:

on déduit de chaque proposition concernant les éléments de classe α, α étant un nombre arbitraire de seconde classe de G. Cantor, *une proposition sur les ensembles analytiques en changeant partout les mots* „élément de classe α" *en* „ensemble analytique" *et les mots* „ensemble de classe inférieure à α" *en* „ensemble mesurable B". Réciproquement, *on déduit de chaque proposition sur les ensembles analytiques une proposition concernant les éléments de classe α, α étant un nombre quelconque de seconde classe de* G. Cantor, *en effectuant partout, dans l'énoncé et dans la démonstration, le changement inverse des mots indiqués.*

Les propositions qu'on obtient de cette manière [2]) sont dites *duales* ou *correlatives par dualité.*

La question est maintenant de savoir quelle est la dernière raison de cette dualité. Sans vouloir trancher le problème soulevé par cette dualité, nous nous bornons à faire les remarques suivantes.

La seule définition logique que nous avons pour „le plus petit nombre de *troisième* puissance" Ω, c'est une qualité purement négative: *l'absence d'une énumération des nombres transfinis inférieures à Ω au moyen des entiers positifs.* Or, cette absence en

[2]) Il est à peine besoin de remarquer qu'il est nécessaire de prendre une précaution pour être certain d'appliquer d'une manière correcte la dualité: il faut que la proposition considérée ne contienne pas des ensembles de *classes supérieures* à α; de même, le mot „existence" exige de grande attention puisque son sens (même constructif) est souvent indéterminé. D'ailleurs, des précautions sont nécessaires pour être sûr de constater la présence de l'*Axiome de Zermelo* dans une proposition de la théorie des ensembles, comme l'a fait remarquer, avec toute raison M. W. Sierpiński.

réalité aura lieu pour certains nombres de seconde classe de G. Cantor, puisque avoir une énumération des nombres inférieurs à α au moyen des entiers positifs c'est avoir une représentation finie du nombre α. Cependant, les nombres α qui peuvent être écrits de cette manière sont en une infinité *dénombrable* et ne sont rien à l'égard de ceux qui échappent cette répresentation: il y a une infinité non dènombrable des nombres de seconde classe de G. Cantor conçus par les idéalistes et pour lesquels nous n'avons et nous n'aurons aucune représentation finie et, par suite, aucune énumération indiquée. Les idéalistes considérent ces énumérations comme existantes „*en soi*" sans que nous pussions jamais en avoir une. C'est toujours une des formes du *paradoxe du tranfini* sur lequel M. Emile Borel a insisté tant des fois. Il est clair que les éléments E d'une telle classe α, étant mesurables B pour les idéalistes, possèdent en réalité les propriétés des ensembles analytiques les plus généraux.

Cette possibilité de concevoir un nombre transfini qui est de seconde classe de G. Cantor et qui en réalité possède la *troisième puissance* est, à mon avis, la preuve de ce que nous n'avons pas une conception suffisamment nette de l'*infini actuel* bien que cette notion peut être définie en termes de la logique abstraite.

„*Il n'y a pas de l'infini actuel*" (Henri Poincaré)[3]) et ce que nous appelons dans nos raissonnements l'*infini actuel* ce n'est que „*fini très grand*" (Emile Borel). On doit à M. Emile Borel cette idée de la plus haute importance[4]). M. Emile Borel a donné même un procédé de formation de certains entiers positifs tout analogue au procédé transfini de G. Cantor[5]).

³) Henri Poincaré, *Les derniers efforts des logisticiens* (*Science et Méthode*, 1912, p. 212).

⁴) Emile Borel, *La Philosophie mathématique et l'infini* (*Revue du Mois*, août 1912).

⁵) Citons textuellement ce passage important de M. Emile Borel (*Revue du Mois*, 10 juillet 1914: *L'Infini mathématique et la réalité*):

„... En introduisant des symboles convenables, il sera possible d'écrire effectivement d'une manière très simple certains nombres qui, dans le système décimal, ne pourraient pas humainement être écrits. Si l'on désigne par exemple par (n) un nombre de n chiffres, ((n)) sera un nombre dont le nombre de chiffres a luimême n chiffres de sorte que ((10)) désigne un nombre de 10 miliards de chiffres. En écrivant une parenthèse de plus, (((10))) désignera un nombre dont le nombre de chiffres a lui-même 10 miliards de chiffres. On peut aller bien plus loin et imaginer que l'on écrive des milliers de parenthèses ainsi superposées, puis qu'au lieu d'écrire effectivement ces parenthèsen on désigne par [n] le nombre ((...((10))...)) dans le cas où il y a n parenthèses: en superposant les crochets, on aura une notation encore plus condensée, et ainsi de suite. Il est impossible de ne pas être frappé de l'analogie entre la définition de tels symboles arithmétiques et la marche suivie par George Cantor pour construire les nombres transfinis. Dans les deux cas, on est arrêté par la même difficulté; on ne peut formuler effectivement qu'un nombre fini de conventions et, si loin que ces conventions permettent d'aller, les nombres qu'elles permettent d'atteindre pratiquement ne sont rien à l'égard de ceux qui leur échappent. Lorsqu'on sera arrivé à fixer des conventions telles que l'on puisse décrire en quelques pages un nombre colossalement grand, il y aura des nombres encore bien plus grands qui, avec ces mêmes conventions, ne pourront être définis que par des écritures exigeant des milliards de tonnes de papier".

En réalité, chaque quantité fixe, chaque valeur constante, chaque nombre déterminé sont nécessairement *finis*. Nous ne possédons l'idée de l'infini qu'en prenant le fini et en le faisant croître. C'est toujours donc l'*indéfini* qui est la véritable idée de l'infini. Ainsi nous revenons aux voies classiques de l'Analyse mathématique qu'elle avait *avant* des travaux de G. Cantor.

Mais il faut bien comprendre le vrai sens de la notion de l'infini actuel. Voici les idées de M. Emile Borel à cet égard[6]).

La possibilité humaine de définir *en fait* des nombres, en dépit des apparences, est très limitée même si l'on assigne une durée *indéfini* à l'humanité. D'après le calcul de M. A. S. Eddington, la grandeur de tout corps célèste ne peut jamais dépasser une certaine limite fixe puisque, dans le cas contraire, la pression du rayonnement sérait supérieure à l'attraction neutonienne. Donc, nous n'aurons jamais, quelques soient les conditions physiques de l'existence, la quantité suffisante „des milliards de tonnes de papier" pour écrire des nombres assez grands et néanmoins finis. On objecte ordinairement qu'il n'est nullement de nécessité d'*écrire* effectivement des nombres pour les avoir déterminés: il suffit de *penser à eux*. Mais il faut cependant remarquer qu'il est très difficile de négliger la structure de nos cerveaux subis toujours les procédés finis physiques et les lois *discontinues* des quanta. Dans ces conditions, si nous voulons proscrire les reflexions trop fantaisistes et converver à la Science son but principal: de prévoir les phénomènes observables au moyen des phénomènes observables, il n'est pas douteux

⁶) M. Emile Borel a exposé ces idées dans ses profondes leçons sur la *théorie des probabilités* lues par lui pendant premier semestre de l'année scolaire 1929—1930 à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

que l'idée de l'infini actuel est simplement un modèle mathématique dont destination est de représenter un nombre colossalement grand „fini en soi" et qui n'est pas susceptible à aucune représentation finie [7]).

Nous allons maintenant reprendre l'analogie indiquée entre des ensembles mesurables B et les ensembles analytiques, et donner des exemples de couples des propositions duales. Mais avant d'énoncer explicitement des propositions correlatives, je voudrais d'abord exposer quelques points d'une théorie des ensembles mesurables B dont les principes j'ai indiqué depuis longtemps [8]).

Cette théorie des ensembles mesurables B est basée sur les considérations suivantes [9]).

Domaine fondamental. — Tout d'abord, pour avoir les lois logiques énoncées sous forme la plus simple, nous excluons de nos considérations tous les points *rationnels*. Nous supposons donc que tous les ensembles linéaires E de points que nous considérons sont formés de points *irrationnels*. L'ensemble de *tous* les points irrationnels sera appelé *domaine fondamental* et sera désigné par $\mathcal{J}$

Portions. — Nous appellerons *portion du domaine fondamental* $\mathcal{J}$ l'ensemble des points irrationnels compris entre deux points *rationnels* donnés a et b; nous la désignerons par (a, b). La domaine fondamental $\mathcal{J}$ sera considéré comme une portion et sera désigné, dans ce cas, par $(-\infty, +\infty)$. Si c est un nombre rationnel, les $(-\infty, c)$ et $(c, +\infty)$ sont encore des portions

Classe initiale. — Par définition même, est *de classe initiale* ou de classe K_0 tout ensemble de points E qui est une somme d'un nombre fini ou infini de portions, *ainsi que son complémentaire CE.*

Opération fondamentale — L'opération fondamentale qui nous servira dans cette théorie et que nous faisons introduire conformément aux idées de M. Ch. de la Vallée Poussin [10]) est celle de *passage à la limite.* Appelons *suite convergente* toute suite illimitée d'ensembles de points

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \tag{1}$$

telle que chaque points x du domaine $\mathcal{J}$ *ou bien* appartient, *ou bien* n'appartient pas à tous les E_n, sauf un nombre limité d'entre eux dependant de x. L'ensemble E est dit *limite* de la suite convergente d'ensembles (1) si E est l'ensemble de tous les points x du domaine $\mathcal{J}$ qui appartiennent chacun à tous les E_n à partir d'un certain rang dépendant de x. Nous dirons, dans ce cas, que E est *déduit de la suite convergente* (1) *au moyen de l'opération de passage à la limite*, et nous le désignons par $\lim\limits_{n=\infty} E_n$.

Notations algébriqus [11]). Nous ferons, au sujet des ensembles de points irrationnels, des conventions classiques concernant les notations algébriques: de somme E_1+E_2, de partie commune $E_1 \times E_2$, de différence $E_2 - E_1$, des égalités et inégalités $E_1 = E_2$, $E_1 < E_2$, $E \equiv 0$ et de complémentaire CE. Ainsi, nous avons $E_2 - E_1 = E_2 \times CE_1$.

Soit $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polynome en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à coefficients

[7]) Un nombre fini peut échapper à tout mode de représentation finie et, en même temps, un nombre plus grand peut être représentable d'une manière finie. Il paraît que c'est à Archimède qu'on doit cette remarque importante. *Voir* son l'*Arénaire.*

[8]) *Voir* la Note de M. Lavrentieff: *Sur le sous-classes de la classification de M. René Baire* (*C. R. Acad. Sc.*, séance du 12 janvier 1925).

J'ai entrepris la construction de cette théorie ayant pour but la résolution du problème de la détermination des puissances des complémentaires analytiques: je n'ai reconnu pas à cette époque le vrai caractère de ce problème d'impossibilité en le regardant comme un véritaple problème de la Science. Puisque tout complémentaire analytique E, défini par un crible C, se décompose en une infinité transfinie d'ensembles mesurables B

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + \ldots + E_\omega + \ldots + E_\alpha + \ldots /\Omega$$

la question a été posé de savoir quelles sont les classes des constituantes E_α. C'est pour la détermination des classes des E_α que j'ai introduit la notion d'*élément de classe* α et ai considéré le rôle des élements de classe α dans la formation des autres ensembles de classe α. Puisque tout ensemble E de classe α a été reconnu comme un ensemble clairsemé d'éléments de classe α, je fut arrivé à définir les sous-classes de la classification de MM. Baire — de la Vallée Poussin.

La partie très importante que M. Lavrentieff a contribué à cette théorie c'est la preuve rigoureuse de ce que cette sous-classification n'est pas purement idéale, c'est-à-dire qu'*il existe* effectivement des ensembles de classe α et de toute sous-classe β, quel que soit un nombre transfini de seconde classe β

[9]) L'exposition complète de cette théorie sera donnée dans mon livre: *Leçons sur les ensembles analytiques* qui paraîtra chez Gauthier-Villars.

[10]) Ch. de la Vallée Poussin, *Sur l'intégrale de Lebesgue* (*Transactions of the American Mathematical Society*, 1915);

Ch. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire*, 1916, p. 8.

[11]) *Voir* Ch. de la Vallée Poussin, *loc. cit.*

égaux à 1. Si nous substituons aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement des ensembles quelconques de points $E_1, E_2, \ldots, E_n$ et si nous considérons les signes d'opérations $+$ et $\times$ comme somme et partie commune dans le domaine des ensembles, le polynome P devient un ensemble de points bien déterminé que nous désignons encore par $P(E_1, E_2, \ldots, E_n)$. Dans ce cas, la signification de $P(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ ne dépend nullement de l'ordre des termes de P.

Si le polynome $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a pour coefficients $+1$ et -1 et si le premier terme de P est positif, nous pouvons encore retenir l'interprétation de $P(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ dans le domaine des ensembles sous la condition de poser

$$U - V - W = (U - V) - W.$$

les U, V et W étant des ensembles quelconques de points. Dans ce cas, le sens de l'expression $P(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ dépend naturellement de l'ordre des termes du polynome $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Series d'ensembles. — Appelons *série d'ensembles* le symbole infini

(2) $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

où la lettre u_n désigne un ensemble de points précédé du signe $+$ ou de signe $-$

L'ensemble de points qu'on obtient en supprimant le signe du terme u_n sera appelé *valeur absolue de* u_n; nous désignerons par $|u_n|$ cet ensemble.

Nous dirons qu'une sérié d'ensembles (2) est *convergente* si, S_n étant la somme des n premiers termes de cette série, la suite $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, est convergente. Dans ce cas, l'ensemble-limite S de cette suite sera appelé *somme* de la série (2) et nous écrirons l'égalité

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Nous ne considérons jamais que des séries convergentes; ces séries ont le premier terme u_1 *positif* puisque, dans le cas contraire, la somme S_n des n premiers termes n'aurait aucun sens.

Nous nous occuperons des séries *alternées décroissantes*: ces séries sont de la forme

$$E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \ldots + (-1)^{n+1} E_n + \ldots$$

où les ensembles de points $E_1, E_2, \ldots$ forment une suite *décroissante:* $E_1 > E_2 > \ldots > E_n > \ldots$

Pour qu'une série alternée décroissante d'ensembles $E_1 - E_2 + E_3 - \ldots$ *soit convergente, il faut et il suffit que le terme général tende vers zéro*: $\lim\limits_{n=\infty} E_n = 0$.

Classification des ensembles. — C'est à partir de la classe initiale K_0 et au moyen de l'opération fondamentale lim que nous définissons *formellement* pas à pas le classes successives de B a i r e — d e l a V a l l é e P o u s s i n

$$K_0,\ K_1,\ K_2, \ldots,\ K_\nu, \ldots,\ K_\omega, \ldots,\ K_\alpha, \ldots / \Omega.$$

La classe K_α est ici définie *logiquement* (*formellement*) comme l'ensemble de tous les ensembles de points E qui sont limites, $E = \lim\limits_{n=\infty} E_n$, d'ensembles E_n de classes précédentes sans être d'une classe précédente.

Les classes de la classification de MM. B a i r e — d e l a V a l l é e P o u s s i n n'ont pas d'éléments communs deux à deux.

La totalité des ensembles appartenant aux classes de cette classification coïncide avec la totalité des ensembles mesurables B.

Si l'ensemble quelconque E appartient à la classe K_α, nous écrivons l'égalité

$$cl\, E = \alpha$$

et nous dirons que E est *de classe* α.

Si l'ensemble de points E est de classe α, *son complémentaire CE l'est aussi.*

La somme $E_1 + E_2 + \ldots + E_n$ *et le produit* $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ *d'un nombre fini d'ensembles est de classe au plus égale à la plus grande des classes des ensembles composants* E_i.

Accessibilité. — Nous dirons qu'un ensemble E appartenant à la classe K_α est *accessible supérieurement* si E est la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles de classes inférieures à α. De même, nous dirons que l'ensemble E de classe α est *accessible inférieurement* si E est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de classes inférieures à α.

Si l'ensemble E de classe α est accessible supérieurement, son complémentaire CE est accessible inférieurement, et *vice versa.*

L'ensemble E de classe α est dit *bilatéral* s'il est accessible supérieurement *et* inférieurement en même temps; l'ensemble E de classe α est dit *unilatéral* s'il est accessible supérieurement ou inférieurement et s'il n'est pas bilatéral.

Enfin, disons que l'ensemble E de classe α est *inaccessible de deux cotés* s'il n'est accessible ni supérieurement, ni inférieurement.

Toute classe $K_{\alpha+1}$ de première espèce est formée des ensembles unilatéraux et des ensembles inaccessibles de deux cotés. Toute classe K_α de seconde espèce est formée des ensembles bilatéraux, unilatéraux et inaccessibles de deux cotés.

Les classes de première espèce $K_{\alpha+1}$ ne peuvent pas contenir des ensembles bilatéraux. Toute classe de seconde espèce contient effectivement des ensembles bilatéraux.

L'ensemble de tous les ensembles bilatéraux de la classe K_α de seconde espèce s'appelle *base* de la classe K_α; la base de la classe K_α sera désignée par B_α.

La limite d'ensembles de la base B_α ne peut jamais appartenir à la classe $K_{\alpha+1}$.

Si l'ensemble E de points est la somme d'une série alternante d'ensembles de classes $<\alpha$, alors E est ou bien de classe $<\alpha$, ou bien de la base B_α.

Eléments. — Pour analyser la structure des ensembles de classe α les plus généraux, nous prenons comme un instrument les ensembles *unilatéraux accessibles supérieurement de K_α*. Ces ensembles sont dits *éléments de classe α*.

Il y a une analogie réelle *d'une part* entre les points ordinaires et les éléments de la classe K_α, et *d'autre part* entre les portions du domaine fondamental $\mathcal{J}$ et les ensembles de la base B_α.

Les éléments de classe α jouent un rôle tout-à-fait essentiel dans la formation des ensembles de classe α:

la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de points E soit de classe $\leqslant \alpha$ est que E soit une somme d'une infinité dénombrable d'éléments de classes $\leqslant \alpha$ sans parties communes deux à deux, ainsi que son complémentaire CE: $E = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_n + \ldots$, $CE = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots$, ϵ_i et η_j étant des éléments de classes $\leqslant \alpha$ sans point commun deux à deux.

Séparabilité (α). — Deux ensembles quelconques de points E_1 et E_2 sont dits *séparables relativement a la classe K_α* ou simplement *séparables* (α) s'il existe deux ensembles H_1 et H_2 de classes $<\alpha$ ou bien de la base B_α, sans partie commune et contenant respectivement les ensembles E_1 et E_2: $E_1 < H_1$, $E_2 < H_2$. Ces ensembles H_1 et H_2 sont dits *séparateurs* [12]).

[12]) Je dois à M. Henri Lebesgue cette terminologie.

Premier petit principe. — Un point pris seul est évidemment un élèment de classe 1 Deux points différents x_1 et x_2 sont manifestement séparables au moyen de deux portions du domaine fondamental, δ_1 et δ_2, sans partie commune. La même proposition a lieu pour les éléments de la classe K_α; nous appellerons cette importante proposition *premier petit principe.* Voici son énoncé:

Premier petit principe. — *Deux éléments de classe α sans partie commune sont toujours séparables* (α).

Le rôle que joue ce principe est très important. Voici la démonstration de ce principe.

Soient E et $\mathcal{E}$ deux éléments de classe α sans point commun. Par définitions même, E et $\mathcal{E}$ sont respectivement les limites de deux suites décroissantes

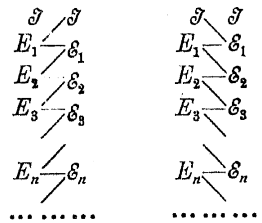
$$E_1 > E_2 > \ldots > E_n > \ldots$$

et

$$\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2 > \ldots > \mathcal{E}_n > \ldots$$

d'ensembles de classes $<\alpha$: $E = \lim E_n$, $\mathcal{E} = \lim \mathcal{E}_n$.

Ecrivons maintenant deux schèmes verticaux



et prenons tous les produits de deux lettres situées sur une même droite inclinée avec le signe $+$ et les produits de deux lettres situées sur une même droite horizontale avec le signe $-$. Nous obtenons ainsi deux séries altérnées décroissantes d'ensembles de classes $<\alpha$

$$\mathcal{J}\cdot E_1 - E_1\cdot\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1 E_2 - E_2 \mathcal{E}_2 + \ldots$$

et

$$\mathcal{J}\cdot\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1 E_1 + E_1 \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2 E_2 + \ldots$$

Ces deux séries d'ensembles sont évidemment convergentes puisque E et $\mathcal{E}$ n'ont pas de point commun et, par suite, le terme général des deux séries a pour limite *zéro*.

Soit H_1 la somme de la première série et H_2 la somme de la deuxième. D'après la théorème précédent sur les séries alternées d'ensembles de classes $<\alpha$, les deux ensembles H_1 et H_2 sont *ou bien* de classe $<\alpha$, *ou bien* de la base B_α.

Cela posé, prenons un point quelconque x du domaine $\mathcal{J}$. Supposons que x appartient à k termes de la colonne gauche et à l termes de la colonne droite du schème vertical précédent. On a manifestement $k \geqslant 1$ et $l \geqslant 1$. Si $k=l$, le point x n'appartient ni à H_1, ni à H_2; il appartient évidemment à H_1 ou à H_2 suivant que nous avons $k>l$ ou $k<l$. Donc, les ensembles H_1 et H_2 sont sans points communs et contiennent respectivement E et $\mathcal{E}$, ce qui prouve le premier petit principe. c. q. f. d.

Ensembles isolés d'éléments. — Il est évident qu'un nombre *fini* de *points* différents $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont séparables *simultanément* au moyen de portions correspondantes $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ sans parties communes deux à deux. De même, les éléments $e_1, e_2, \dots, e_m$ de classe α sans points communs deux à deux sont toujours séparables simultanément au moyen des ensembles-séparateurs $h_1, h_2, \dots, h_m$ de classe $<\alpha$, ou bien de la base B_α.

Or, une *infinité dénombrable* de points $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ n'admet cette séparation simultanée (*uniforme*) que dans le cas où leur ensemble E est un *ensemble isolé*: cela vaut dire que chaque point x de E est *isolé dans* E pouvant être enfermé dans une portion δ qui ne contient aucun autre point de E.

D'une manière analogue, considérons un ensemble dénombrable E d'éléments $e_1, e_2, \dots e_n, \dots$ de classe α. Un élément e de E est dit *isolé dans* E s'il existe un ensemble-séparateur H de classe $<\alpha$, ou bien de la base B_α, contenant l'élément e et qui ne contient pas de points d'un élémente de E autre que e. L'ensemble E lui-même est *dit isolé* si chacun de ses éléments est isolé dans E.

Pour qu'une infinité dénombrable d'éléments de classe α

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$$

sans points communs deux à deux admette une séparation uniforme, il faut et il suffit que leur ensemble E soit un ensemble isolé.

Ensembles clairsemés d'éléments. — L'une des notions importantes qu'on doit à M. A. Denjoy, c'est la définition d'*ensemble clairsemé*. Nous savons déjà ce qu'on doit entendre, d'après M. A. Denjoy, par *ensemble clairsemé de points*: c'est un ensemble dénombrable de points E dont chaque partie E_1 possède un point isolé dans E_1. On sait que tout ensemble clairsemé E de point peut être mis sous forme bien ordonnée

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_\omega, \dots, x_\gamma, \dots /\vartheta \tag{1}$$

correspondant à un nombre transfini ϑ de seconde classe de G. Cantor de manière que le terme x_γ soit un point isolé dans une partie de E qu'on obtient en supprimant de E tous les points $x_{\gamma'}$ qui précèdent x_γ, $\gamma'<\gamma$; ici le nombre γ est un nombre quelconque inférieur à ϑ. En d'autres termes, à la suite bien ordonnée de points (1) nous pouvons faire correspondre une suite bien ordonnée

$$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\omega, \dots, \delta_\gamma, \dots /\vartheta \tag{2}$$

formée de portions du domaine $\mathcal{J}$ et telle que, quel que soit un nombre γ inférieur à ϑ, la portion δ_γ contienne le point correspondant x_γ et ne contienne aucun des points suivants $x_{\gamma''}$, $\gamma''>\gamma'$. On sait que la notion d'ensemble clairsemé est un instrument très utile dans l'étude des ensembles dénombrables de points [13]).

De même, nous appelons *ensemble clairsemé d'éléments* de classe α tout ensemble dénombrable E d'éléments de classe α sans points communs deux à deux dont chaque partie E_1 possède un élément isolé dans E_1. Tout ensemble clairsemé E d'éléments de classe α peut être mis sous forme bien ordonnée

$$e_0, e_1, e_2, \dots, e_\omega, \dots, e_\gamma, \dots /\vartheta \tag{I}$$

correspondant à un nombre transfini ϑ de seconde classe de G. Cantor de manière qu'il existe une suite bien ordonnée des ensembles-séparateurs de classe $<\alpha$ ou de la base B_α

$$h_0, h_1, h_2, \dots, h_\omega, \dots, h_\gamma, \dots /\vartheta \tag{II}$$

telle que, quel que soit un nombre γ inférieureur a ϑ, l'ensemble-séparateur h_γ contienne l'élément correspondant e_γ et ne contienne des points d'aucun des éléments suivants $e_{\gamma''}$, $\gamma''>\gamma$.

La notion d'ensemble clairsemé d'éléments joue un rôle tout-à-

[13]) M. M. Fréchet a transporté la notion d'ensemble clairsemé dans le domaine de la Topologie. *Voir* ses importants *Les espaces abstraits*, Paris, 1928, p. 174 et les travaux dans les *Fundamenta Mathematicae*, 1927—1929.

fait essentiel dans l'étude de la structure-même des ensembles les plus généraux de classe α. En voici les raisons.

Un point du domaine $\mathcal{J}$ pris seul est évidemment un élément de classe 1. En général, un ensemble dénombrable E de points est un ensemble de classe 2 (accessible inférieurement). *Pour qu'un ensemble dénombrable E de points soit de classe 1, il faut et il suffit que l'ensemble E soit clairsemé au sens de M. A. Denjoy.*

De même, en général, un ensemble dénombrable E d'éléments de classe $\leqslant \alpha$ sans points communs deux à deux est un ensemble de classe $\alpha+1$ (accessible inférieurement). *Pour qu'un ensemble E mesurable B soit de classe $\leqslant \alpha$, il faut et il suffit que l'ensemble E puisse être considéré comme la réunion d'une infinité dénombrable d'éléments de classe $\leqslant \alpha$ sans points communs deux à deux et dont l'ensemble est clairsemé au sens précédemment donné* [14]):

$$\text{(II)} \qquad E = e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_\omega + \ldots + e_\gamma + \ldots/\vartheta.$$

[14]) Nous avons défini précédemment les ensembles clairsemés formés d'éléments *précisements de classe α* (et non pas de classes $\leqslant \alpha$). Si l'on borne à cette définition, le théorème du texte doit être énoncé de la manière suivante:

Tout ensemble E de classe $\leqslant \alpha$ est la somme de deux ensembles E_1 et E_2 dont le premier est de classe α accessible inférieurement et le second est formé d'une infinité dénombrable d'éléments précisément de classe α sans points communs deux à deux et dont l'ensemble est clairsemé au sens précédemment défini. Réciproquement, *la somme de deux ensembles E_1 et E_2 de la forme indiquée est un ensemble de classe $\leqslant \alpha$.*

Mais il me semble préférable d'étendre un peu la définition donnée en introduisant la notion d'ensemble *clairsemé relativement à la classe α*: c'est le cas où tous les ensembles-séparateurs h_γ sont de classe $<\alpha$, ou de la base B_α quel que soient les éléments correspondants e_γ de classes $\leqslant \alpha$.

On voit bien que, en adoptant cette définition, nous pouvons supprimer l'ensemble E_1 puisque tous les éléments e de E_1 sont de classes inférieures à α et, par suite, nous pouvons les supposer identiques aux ensembles-séparateurs h correspondants. Il en résulte que si nous numérotons les éléments de E_1 au moyen des entiers finis, en réservant les indices transfinis pour les éléments de E_2, nous obtenons le développement clairsémé (III) du texte.

Aux ensembles clairsemés relativement à la classe α, on peut opposer les ensembles *clairsemés au sens absolu*: c'est le cas où chaque ensemble-séparateur h_γ est *ou bien* de classe rigoureusement inférieure à la classe de l'élément corespondant e_γ, *ou bien* de la classe de cet élément.

La notion d'ensemble clairsemé au sens absolu est très importante, parce qu'elle nous permet d'étudier d'une manière analogue la structure des ensembles *bilatéraux* de chaque classe α de deuxième espèce.

Les sous-classes. — Ainsi, on peut toujours mettre tout ensemble E mesurable B de classe α sous la forme d'une série clairsemée d'éléments de classes $\leqslant \alpha$ en une infinité dénombrable

$$\text{(III)} \qquad E = e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_\omega + \ldots + e_\gamma + \ldots/\vartheta$$

qui correspond a un nombre transfini ϑ de seconde classe de G. Cantor. Comme chaque ensemble E de classe α admet une infinité des développement différents (III), à E correspond une infinité des nombres transfinis ϑ. Parmi ces nombres ϑ, il y a un qui est le plus petit; nous le désignons par β. Ainsi à chaque ensemble E de classe α correspond un nombre transfini β bien déterminé.

Nous conviendrons de dire que les ensembles E de classe α, qui correspondent au même nombre transfini β, forment la sous-classe β. Nous sommes ainsi amenés à la répartition théorique des ensembles de classe α de la classification de Baire—de la Vallée Poussin en une infinité tramsfinie de sous-classes numérotées au moyen des nombres transfinis de seconde classe de G. Cantor.

On voit bien que les sous classes ainsi définies sont sans éléments communs deux à deux et que *chaque ensemble E mesurable B appartient à une classe déterminée α et à une sous-classe determiné β.*

Il serait tous à fait désirable qu'on ait quelques résultats généraux sur la *sous-classification* ainsi définie des ensembles mesurables B.

La sous-classification et le théorème de Baire. — On doit à M. Baire un résultat de la plus haute importance, qui nous donne *la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse considérer la fonction $f(x)$ déterminée par ses valeurs numériques sur le segment* $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ *comme limite de fonctions continues, c'est-à-dire comme une fonction de classe 1 de sa classification.* On sait que la partie principale de la démonstration de M. Baire lui-même consiste à fournir un procédé régulier opératoire permettant, par une infinité dénombrable d'opérations et à partir des valeurs numériques de $f(x)$, de reconnaître si $f(x)$ est ou non de classe 1 et, dans le premier cas, de trouver effectivement une suite de fonctions continues $f_1(x)$, $f_2(x)$,... tendant vers $f(x)$.

Cependant, le procédé opératoire de M. Baire bien qu'étant dénombrable, est essentiellement *transfini*, puisque les pas successifs du procédé de M. Baire sont numérotés au moyen des certains nombres transfinis de seconde classe de G. Cantor, en une infinité dénombrable. C'est la raison pour laquelle M. M. H. Lebesgue et Ch. de la Vallée Poussin ont donné plusieurs démonstrations du théorème de M. Baire *sans l'intervention des nombres transfinis* [15]). On sait que les difficultés de la démonstration de ce théorème ont été vaincues au prix de la perte du procédé régulier opératoire: c'est *l'existence* seule d'une suite de fonctions continues $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... tendant vers $f(x)$ donnée qui a été obtenue et non pas la *construction effective* de chacune des fonctions $f_1, f_2, \dots$ [16])

Si nous reprenons maintenant le procédé opératoire de M. Baire, nous observons immédiatement que la *longueur* du procédé de M. Baire est différente pour les fonctions diverses: cette longueur dépend entièrement de la fonction considérée $f(x)$. Et comme la longueur du procédé de M. Baire a pour mesure un nombre transfini déterminé de seconde classe de G. Cantor, *il est naturel de*

[15]) *Voir* l'article de M. H. Lebesgue dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1904. *Voir* aussi la Note de M. H. Lebesgue *Démonstration d'un théorème de M. Baire* dans les *Leçons sur les fonctions de variables réelles* 1905 de M. Emile Borel et le Mémoire de M. H. Lebesgue *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*Journal de Mathématiques*, 1905, p. 183).

Ch. de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire*, 1916, p. 125. Cf. C. Kuratowski, *Fund. Math.* t. III, p. 104.

Je dois signaler que, en 1903, M. Emile Borel dans la Note *Sur la représentation effective de certaines fonctions discontinues, comme limites de fonctions continues* (*Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 137, 30 novembre 1903, p. 903) a insisté sur l'intérêt qu'on aurait à obtenir la démonstration du théorème de Baire *sans l'intervention des nombres transfinis* et a indiqué qu'il y a des précédents dans le cas du théorème dit de Cantor Bendixon.

[16]) Dans son Mémoire *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*Journ. de Math.*, 1905, p. 183), M. H. Lebesgue a fait une intéressante remarque en plaçant la question sur le terrain du réalisme: „Tout procédé opératoire relatif aux fonctions les plus générales suppose que l'on sait effectuer certaies opérations relatives à ces fonctions. Comme il n'y a aucune question, si simple qu'elle soit, que l'on puisse résoudre pour la fonction la plus générale, donnée d'une manière quelconque, tout procédé opératoire est illusoire quand on cherche à l'appliquer au cas général. Le procédé de M. Baire n'échappe pas à cette critique, car il suppose que l'on sache trouver les points de discontinuité d'une fonction sur un ensemble parfait, ce que l'on ne sait pas faire dans le cas général. Mais, comme le plus souvent on sait effectuer cette recherche, le procédé de M. Baire est pratiquement utile toutes les fois qu'il ne demande qu'un nombre fini d'opérations. Quand il exige un nombre infini d'opérations, il peut encore être utile, non plus à proprement parler comme procédé opératoire, mais comme guide du raisonnement".

classer les fonctions $f(x)$ de classe 1 suivant la longueur du procédé opératoire de M. Baire. Nous sommes ainsi amenés à la *répartition des fonctions de classe 1 en s o u s - c l a s s e s numérotées au moyen des nombres transfinis de seconde classe de G. Cantor* [17]).

Si nous appliquons maintenant le procédé opératoire de M. Baire aux fonctions $f(x)$ de classe 1 *ne pouvant prendre que l'une des deux valeurs* 0 *et* 1, voici ce que nous constatons: une telle fonction $f(x)$ définit un ensemble E des points pour lesquels la fonction a la valeur 1; cet ensemble E est de classe 1 (ou bien 0) dans la classification d'*ensembles* de Baire—de la Vallée Poussin. Mais le point capital consiste précisément à ce que *le procédé opératoire de Baire appliquée à une telle fonction $f(x)$ est identique au développement de l'ensemble E en une série clairsemé* (III) *formée d'éléments de classe* 1, *c'est-à-dire composée de points et d'ensembles parfaits, en une infinité dénombrable.* C'est cette décomposition d'un ensemble de classe 1 en série clairsemée d'ensembles fermés qui constitue la vraie *essence* de la démonstration de M. Baire de son théorème. D'ailleurs, les sous-classes déduites du procédé de M Baire coïncident avec les sous-classes définies au moyen des développements clairsemés et, par suite, le procédé de M. Baire fournit les séries clairsemées dont la longueur est *la plus petite.*

Comme tout ensemble de classe α, quel que soit α fini ou transfini de seconde classe de G. Cantor, est développable en série clairsemée d'éléments, nous en concluons que le procédé opératoire de M. Baire *se conserve aux classes supérieures.*

Méthode de M. Baire des définitions arithmétiques. — On sait que M. René Baire lui-même n'utilisait jamais la méthode d'*application sur le continu* pour démontrer l'*existence des fonctions de toute classe.* Cette précaution est très naturelle au point de vue du réalisme sévère, puisque considérer comme *donnée* une fonction $f(x)$ de classe α déduite de l'application sur le continu de la famille $\mathscr{F}$ composée de *toutes* les fonctions des classes inférieures à α, c'est regarder comme *connue* chacun fonction rentrant dans la famille $\mathscr{F}$ ce

[17]) M. A. Denjoy a signalé l'intérêt qui s'attache à la repartition des fonctions totalisables en classes suivant la longueur du procédé de la totalisation. La repartition faite par M. A. Denjoy en 1916 dans son *Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables* (*Annales de l'Ecole Supérieure*, t. 33) ressemble beaucoup à la répartition indiquée des fonctions de classe 1 suivant la longueur du procédé opératoire de M. Baire.

qu'on ne peut pas prendre au sérieux, la puissance de la famille $\mathcal{F}$ étant non dénombrable [18]).

C'est la raison pour laquelle M. René Baire lui-même a préferé construire *en fait* une fonction $f(x)$ déterminée de la classe considérée en lui donnant une définition *arithmétique*. C'est précisément par cette méthode que M. Baire a démontré l'existence *constructive* des fonctions de classe **3**. Voici la fonction de M. Baire:

si l'on réduit en fraction continue un nombre irrationnel x compris entre 0 *et* 1

$$x = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \dots + \cfrac{1}{\alpha_n + \dots}}}$$

la fonction $f(x)$ égale à 1 *si les quotients incomplets $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ tendent vers l'infini, et égale à* 0 *dans le cas contraire, est une fonction précisément de classe* **3**.

On sait que les recherches de M. Baire [19]) ont été arrêtées sur l'étude des fonctions de classe **3**. Or, les idées sur lesquelles est basée la théorie considérée des ensembles B et dont partie est empruntée de M. H. Lebesgue [20]) et de M. R. Baire lui-même, permettent de prolonger *très naturellement* les recherches de M. R. Baire au delà de la classe **3** et de pénétrer dans la structure-même, des ensembles de classes supérieures. En particulier, la possibilité se présenta de donner des définitions arithmétiques à des fonctions de classes supérieures. Voici un résultat fort intéressant des recherches de M[lle] Keldych sur cette voie:

si l'on réduit en fraction continue un nombre irrationnel x compris entre 0 *et* 1

$$x = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \dots + \cfrac{1}{\alpha_n + \dots}}}$$

la fonction $f(x)$ égale à 1 *si parmi les quotients incomplets $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ il existe une infinité des quotients incomplets différents dont chacun est répété une infinité de fois, et égale à* 0 *dans le cas contraire, est une fonction précisément de classe* **4**.

Il serait fort intéressant de pouvoir donner un exemple arithméthique de fonction d'une classe *finie* arbitraire de M. R. Baire et, en particulier, de classe **5**.

Les recherches de M. Lavrentieff. — Revenons maintenant à la sous-classification des ensembles de classe α. On peut se demander si cette sous-classification n'est pas purement idéale, c'est-à-dire *s'il existe* effectivement des ensembles dans les diverses sous-classes définies précédemment. C'est M. Lavrentieff qui a contribué à la théorie précédente un résultat tout fondamental sans lequel la théorie exposée serait purement formelle: *il existe effectivement des ensembles de classe α et de toutes sous-classes* [21]).

D'ailleurs, il a démontré que les sous-classes se conservent dans toutes les transformations homéomorphes.

Séparabilité ($C\alpha$). — Nous avons introduit précédemment la notion de *séparabilité* (α). Ensuite, nous avons démontré une proposition fondamentale que nous avons appelé *premier petit principe* et qui consiste à ce que deux éléments quelconques de classe α sans partie commune sont toujours séparables (α).

[18]) La méthode d'application sur le continu a été employée: par M. Emile Borel dans Note III de ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, 1905 pour établir l'existence des fonctions de toute classe finie; par M. Henri Lebesgue pour établir l'existence des fonctions du toute classe (*Journ. de Math.*, 1905, p. 211); par Ch. de la Vallée Poussin (*Intégrales, fonctions, classes de Baire*, p. 145).

Voir aussi la Note de M. W. Sierpiński: *Sur l'existence de toutes les classes d'ensembles mesurables B* (*C. R. Acad. Sc.*, novembre 1922) et la Note de M. C. Kuratowski; *Sur l'existence effective des fonctions représentables analytiquement de toute classe de Baire* (*C. R. Acad. Sc.*, Janvier 1923).

Une autre méthode dont la nature est peut-être difficile à préciser, est donnée par M. W. Sierpiński et par l'auteur. *Voir* notre Note: *Sur les classes des constituantes d'un complémentaire analytique* (*C. R. Acad. Sc.*, séance du 12 novembre 1929).

[19]) *Voir* son profond Mémoire *Sur la représentation des fonctions discontinues*, deuxième partie (*Acta Mathematica*, t. 32, 1909).

[20]) La notion importante d'élément de classe α est due à M. Henri Lebesgue: l'illustre auteur a appelé *ensemble de rang* α ce que nous appelons maintenant *élément de classe* α et a indiqué très nettement le rôle important de ces ensembles dans théorèmes X et XVII de son fondamental Mémoire *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*Journal de Mathématiques*, 1905, pp. 173 et 191).

[21]) *Voir* la Note de M. Lavrentieff: *Sur les sous-classes de la classification de M. René Baire* (*C. R. Acad. Sc.*, séance du 12 janvier 1925).

Il est naturel de chercher à généraliser ce fait important et d'étendre la théorie de séparabilité dans autres ensembles de classe α. Et il est naturel de commencer la construction de cette théorie par l'étude de la séparabilité au moyen des *complémentaires d'éléments de classe* α, c'est-à-dire au moyen des ensembles *accessibles inférieurement de classe* α.

Posons la définition suivante:

Nous dirons que deux ensembles de points E_1 *et* E_2 *sont simultanément séparables* $(C\alpha)$ *s'il existe deux ensembles* H_1 *et* H_2 *de classe* α *et accessibles inférieurement, n'ayant aucun point commun et contenant respectivement* E_1 *et* E_2.

Avant d'indiquer le principe de cette théorie, il convient de faire la remarque suivante [22]). Il serait inutile d'introduire la notion de séparabilité *simultanée* au moyen de deux *éléments* H_1 et H_2 de classe α, puisque, dans ce cas, les ensembles E_1 et E_2 considérés seraient simplement séparables (α). Au contraire, il est important d'introduire la séparabilité $(C\alpha)$, puisque nous verrons qu'*il existe deux ensembles* H_1 *et* H_2 *de classe* α *accessibles inférieurement*, n'ayant *aucun point commun, qui ne sont pas séparables* (α).

Deuxième petit principe. — La théorie de la séparabilité $(C\alpha)$ est basée sur la proposition fondamentale suivante que nous appelons *deuxième petit principe.*

Deuxième petit principe. — *Si* E_1 *et* E_2 *sont deux éléments de classe* α, *les ensembles* R_1 *et* R_2, *que l'on obtient en supprimant de* E_1 *et* E_2 *leur partie commune, sont toujours simultanément séparables* $(C\alpha)$.

Pour le démontrer, prenons deux schèmes verticaux précédents où l'on ne suppose plus que les éléments donnés E et $\mathcal{E}$ de classe α sont sans point commun. Donc, E et $\mathcal{E}$ peuvent avoir des points communs.

Posons

$$H_1 = (\mathcal{J}\cdot E_1 - E_1\cdot \mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_1\cdot E_2 - E_2\cdot \mathcal{E}_2) + \dots$$

et

$$H_2 = (\mathcal{J}\cdot \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1 . E_1) + (E_1\cdot \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2\cdot E_2) + \dots$$

On voit bien que H_1 et H_2 ainsi définis sont: *ou bien* de classes $<\alpha$, *ou bien* de la base B_α, *ou bien* des ensembles unilatéraux de classe α accessibles inférieurement. Et comme H_1 et H_2 n'ont aucun point commun et contiennent respectivement les ensembles R_1 et R_2 qu'on obtient en supprimant de E et $\mathcal{E}$ leur partie commune, le principe énoncé est démontré.

[22]) *Cf.* ma note: *Sur un principe général de la théorie des ensembles analytiques* (*C. R. Acad. Sc.*, séance du 2 sept. 1929).

Ensembles à plusieurs dimensions. — Pour fixer les idées nous nous bornons au cas des ensembles dans l'espace à *deux* dimensions.

Prenons l'espace euclidien $\mathcal{E}$ à deux dimensions. Soit, dans cet espace, un système d'axes rectangulaires quelconque que nous désignerons par $X0Y$.

Appelons *domaine fondamental à deux dimensions* l'ensemble de tous les points $M(x, y)$ du plan $X0Y$ ayant les deux coordonnées, x et y, *irrationnels.* Le domaine fondamental à deux dimensions sera désigné par $\mathcal{J}_{xy}$.

Tous les ensembles plans que nous aurons à considérer sont formés de points du domaine fondamental $\mathcal{J}_{xy}$.

Appelons *portion* du domaine $\mathcal{J}_{xy}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ de ce domaine dont les coordonnées, x et y, appartiennent chacune aux portions (a, b) et (c, d) situées respectivement dans les domaines fondamentaux linéaires $\mathcal{J}_x$ et $\mathcal{J}_y$.

Un ensemble E de points du domaine $\mathcal{J}_{x,y}$ est dit *de classe initiale* K_0 ou *de classe* 0, si l'ensemble E et son complémentaire CE (relativement à $\mathcal{J}_{xy}$) sont chacun une somme d'un nombre fini ou infini de portions du domaine fondamental $\mathcal{J}_{x,y}$.

Si nous cherchons à analyser toutes les définitions et considérations que nous avons donné précédemment relativement aux ensembles *linéaires,* nous constatons qu'elles sont encore toutes applicables sans aucun changement aux domaines à plusieurs dimensions.

En particulier, nous avons les classes de Baire—de la Valée Poussin

$$K_0, K_1, K_2, \dots, K_\omega, \dots, K_\alpha, \dots / \Omega$$

et, dans chaque classe K_α, nous avons des éléments, des ensembles unilatéraux accessibles inférieurements et des ensembles inaccessibles des deux côtés; si la classe K_α est de *deuxième espèce* (c'est à-dire une classe *limite*), nous avons, dans cette classe, des ensembles bilatéraux, dont l'ensemble est dit *base* B_α de classe α.

La définition des sous-classes et leurs propriétés restent intactes dans les domaines à plusieurs dimensions.

D'ailleurs, le domaine fondamental à deux dimensions $\mathcal{J}_{x,y}$ et le domaine fondamental linéaire $\mathcal{J}_t$ sont visiblement *homéomorphes* et, par suite, nous avons les équations simultanées définissant cette homéomorphie

$$(T) \qquad \begin{cases} x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \\ \qquad t = F(x, y) \end{cases}$$

où les fonctions φ ou ψ sont continues sur $\mathcal{J}_t$, et la fonction $F(x, y)$ est continue sur $\mathcal{J}_{x,y}$.

La transformation (T) fait correspondre à tout ensemble de points E dans $\mathcal{J}_{x,y}$ un ensemble linéaire e dans $\mathcal{J}_t$, et *vice versa*. Il est manifeste que cette transformation (T) conserve la classe et la sous-classe si l'ensemble E ou e est mesurable B.

Ensembles universels et doublement universels. — Soit E un ensemble de points quelconque situé dans le domaine à deux dimensions $\mathcal{J}_{x,y}$. Prenons un point x_0 quelconque dans $\mathcal{J}_x$ et menons la droite $x = x_0$ parallèle à l'axe $0Y$. La droite $x = x_0$ coupe l'ensemble E en un certain ensemble linéaire que nous désignons par e.

On voit bien que, si E est un ensemble de classe α, l'ensemble e *considéré comme un ensemble linéaire* est de classe $\leqslant \alpha$. Si E est un élément de classe α, l'ensemble linéaire e est *ou bien* de classe $< \alpha$, *ou bien* un ensemble de classe α accessible supérieurement; si E est un ensemble-complémentaire d'un élément de classe α, l'ensemble linéaire e est *ou bien* de classe $< \alpha$, *ou bien* un ensemble de classe α accessible inférieurement; si E est un ensemble de la base B_α, l'ensemble linéaire e est *ou bien* de classe $< \alpha$, *ou bien* de la base B_α.

Posons la définition suivante.

Définition. — *Un élément E de classe α situé dans $\mathcal{J}_{x,y}$ est dit universel si nous avons, en le coupant avec les parallèles à l'axe $0Y$, tous les ensembles linéaires de classe $< \alpha$ et tous les ensembles accessibles supérieurement de classe α.*

Il existe des éléments universels de toute classe; telle est la proposition importante de M. Lavrentieff qu'il a obtenue au cours de ses recherches sur l'existence effective dans ensembles de toute sous-classe [23]). De même, *il existe des complémentaires universels d'un élément de toute classe*: il suffit de prendre le complémentaire d'un élément universel de classe considéré α.

[23]) *C. R. Acad. Sc.*, séance du 12 janvier 1925.

Au contraire, *il est impossible d'avoir un ensemble E universel de classe α, quel que soit α. De même, il est impossible d'avoir un ensemble E universel bilatéral de classe α, quel que soit α de deuxième espèce.*

En effet, supposons que E est un ensemble de classe α universel. Cela veut dire qu'on obtient tous les ensembles linéaires e de classe $\leqslant \alpha$ en coupant E par des parallèles à l'axe $0Y$. Menons la diagonale $x = y$ et désignons par Θ l'ensemble de points de cette diagonale qui n'appartiennent pas à E; soit η la projection de Θ sur l'axe $0Y$. Il est évident que η considéré comme un ensemble de points du domaine $\mathcal{J}_y$ est un ensemble de classe $\leqslant \alpha$. Donc, il existe une parallèle à l'axe $0Y$, $x = x_0$, qui coupe l'ensemble E précisément en η, ce qui est impossible (le raisonnement par diagonale de Cantor) c. q. f. d.

Par le même raisonnement, on démontre l'impossibilité d'un ensemble universel bilatéral de classe limite α.

Posons une définition très utile. Un couple (E_1, E_2) d'éléments de classe α situés dans le domaine $\mathcal{J}_{x,y}$ est dit *doublement universel* si, quels que soient les ensembles linéaires e_1 et e_2 de classe $< \alpha$, ou bien de classe α accessibles supérieurement, il existe une droite $x = x_0$ parallèle à l'axe $0Y$ qui coupe E_1 et E_2 en e_1 et e_2 respectivement [24]).

Il y a des couples doublement universels. Pour le démontrer, considérons, dans le domaine à deux dimensions $\mathcal{J}_{t,y}$, un élément universel E. Cela veut dire qu'on obtient tous les ensembles linéaires de classe $< \alpha$, ou bien de classe α accessibles supérieurement, en coupant l'ensemble E par des parallèles $t = t_0$ à l'axe $0Y$.

Cela posé, prenons un domaine fondamental nouvel à deux dimensions $\mathcal{J}_{t_1, t_2}$ et considérons une transformation d'homéomorphie en domaine linéaire $\mathcal{J}_x$. Soit

$$(T) \qquad \begin{cases} t_1 = \varphi(x), \quad t_2 = \psi(x) \\ \qquad x = F(t_1, t_2) \end{cases}$$

cette transformation; ici les fonctions φ et ψ sont continues sur $\mathcal{J}_x$, et la fonction F est continue sur $\mathcal{J}_{t_1, t_2}$.

[24]) *Cf.* ma note: *Sur un principe général de la théorie des ensembles analytiques* (*C. R. Acad. Sc.*, séance du 2 sept. 1929).

Considérons maintenant la transformation du domaine $\mathcal{J}_{t,y}$ en $\mathcal{J}_{x,y}$ définie par les équations

$$t=\varphi(x), \quad y=y.$$

Soit E_1 la transformée de E. D'une manière analogue, en posant

$$t=\psi(x), \quad y=y$$

nous transformons le domaine $\mathcal{J}_{t,y}$ en $\mathcal{J}_{x,y}$; soit E_2 la transformée de E. On voit bien que E_1 et E_2 sont des éléments de classe α. Il est aisé de voir que le couple (E_1, E_2) est *doublement universel*. En effet, il existe toujours un x_0 tel que la droite $x=x_0$ coupe E_1 et E_2 en deux ensembles linéaires e_1 et e_2 de classe $<\alpha$, ou bien accessibles supérieurement de classe α, ces ensembles étant donnés à l'avance.

Existence de deux complémentaires d'éléments de classe α non séparables (α). — Nous pouvons maintenant aborder la démonstration de cette existence. Prenons, dans le domaine $\mathcal{J}_{x,y}$, un couple (E_1, E_2) d'éléments de classe α doublement universel et appliquons le deuxième petit principe aux éléments E_1 et E_2. Soient R_1 et R_2 les ensembles qu'on obtient en supprimant de E_1 de E_2 leur partie commune. D'après le principe, il existe deux ensembles de classe α accessibles inférieurement H_1 et H_2 n'ayant aucun point commun et contenant respectivement R_1 et R_2.

Je dis maintenant que *les ensembles H_1 et H_2 ne sont pas séparables* (α).

En effet, s'il y avait deux ensembles Θ_1 et Θ_2 de classe $<\alpha$, ou bien de la base B_α sans point commun et contenant respectivement H_1 et H_2, chaque parallèle à l'axe $0Y$ couperait Θ_1 et Θ_2 en deux ensembles linéaires de classe $<\alpha$, ou bien de la base B_α. Or, le couple (E_1, E_2) est doublement universel. Cela veut dire que, quel que soit un ensemble linéaire e de classe $<\alpha$, ou bien de la base B_α, il existe une droite $x=x_0$ qui coupe E_1 et E_2 précisément en e et Ce respectivement. Donc, l'ensemble E_1 est de la base B_α et *universel*, ce qui est contradictoire [25]. c. q. f. d.

[25]) Cette démonstration est identique à celle de l'existence de deux complémentaires analytiques non séparables B. *Voir* ma Note: *Sur un principe général de la théorie des ensembles analytiques* (*C. R. Acad. Sc.*, séance du 2 sept. 1929).

Généralités sur les ensembles mesurables B. — L'étude des ensembles mesurables B au points de vue de séparabilité [26]) est à peine ébauchée. Ici nous avons une infinité de problèmes très intéressants et, parmi ces problèmes, nous trouvons ceux qui sont de haute importance.

L'idée qui m'a guidé est l'utilité qui me paraît évidente de distinguer entre les ensembles qui sont *très éloignés l'un de l'autre* et ceux qui sont *très approchés l'un de l'autre*. La *mesure* de l'éloignement doit être *descriptive*, c'est-à-dire exprimée au moyen de certains nombres transfinis.

Considérons deux ensembles de points quelconques E et $\mathcal{E}$ sans points communs et séparables B. Soit H un ensemble mesurable B qui contient l'ensemble E et qui ne contient aucun point de l'ensemble $\mathcal{E}$; nous appellerons *ensemble séparateur* cet ensemble H. Parmi les ensembles séparateur H, il y a ceux qui sont de classe *la plus petite*. Soit α cette classe.

Nous considérons les ensembles donnés E et $\mathcal{E}$ d'autant plus approchés l'un de l'autre que le nombre α est grand [27]).

Supposons les ensembles E et $\mathcal{E}$ *mesurables B*; soit γ la classe de E et δ la classe de $\mathcal{E}$. Nous dirons que E et $\mathcal{E}$ sont *éloignés l'un de l'autre*, si le nombre α ainsi défini est rigoureusement inférieur à γ et à δ. Au contraire, si nous avons $\alpha=\gamma$ ou bien $\alpha=\delta$, les ensembles E et $\mathcal{E}$ seront dits *asymptotiques* l'un à l'autre.

Les ensembles E et $\mathcal{E}$ doivent être regardés comme *extrêmement éloignés l'un de l'autre* lorsque $\alpha=0$. Tel est, par exemple, le cas où les ensembles E et $\mathcal{E}$ sont simplement situés dans les portions *différentes* (a, b) et (c, d) du domaine fondamental $\mathcal{J}$ n'ayant aucun point commun.

Ces préliminaires terminés, nous allons porter notre attention sur les *éléments de classe α*. Nous savons que deux éléments quelconques E et $\mathcal{E}$ de classe α sont toujours séparables (α). Cela veut dire qu'il existe un ensemble-séparateur H *ou bien* de classe $<\alpha$, *ou bien* de la base B_α qui contient l'élément E et qui ne contient aucun point de l'élément $\mathcal{E}$. Ceci nous amène à proposer la définition suivante:

[26]) C'est à M. Felix Hausdorff qu'on doit l'introduction d'*idée* générale de séparation si féconde dans la Topologie et dans le domaine des Ensembles.

[27]) On pourrait aussi mesurer la „distance" de deux ensembles quelconques en faisant intervenir la *sous-classe* de l'ensemble-séparateur H.

Nous dirons que deux éléments quelconques E et $\mathcal{E}$ de classe α n'ayant aucun point commun sont voisins l'un de l'autre *lorsque, α étant de première espèce $\alpha = \alpha^* + 1$, il n'existe aucun ensemble-séparateur de classe $< \alpha^*$, et lorsque, α étant de deuxième espèce, il n'existe aucun ensemble-séparateur de classe $< \alpha$.*

On reconnaît que

quel que soit un élément E de classe α, α étant arbitraire, il existe un élément $\mathcal{E}$ de classe α n'ayant aucun point commun avec E et voisin de E. Le cas exceptionnel est celui où le complémentaire CE de E est dénombrable.

Cette proposition paraîtra sans doute bien banale, puisqu'on pourrait raissonner de la manière suivante: nous prenons, dans la portion $(1, 2)$ deux éléments E' et $\mathcal{E}'$ absolument quelconques de classe α n'ayant aucun point commun. D'autre part, divisons la portion $(0, 1)$ en deux ensembles complémentaires e et η de classe α^* si $\alpha = \alpha^* + 1$, et de la base B_α si α est de deuxième espèce. Les sommes $e + E'$ sont évidemment des éléments de classe α *voisins l'un de l'autre.*

Or, l'élément $e + E'$ de classe α ainsi défini n'est pas un élément absolument quelconque de classe α puisqu'il possède une *partie parasite* e, dans la portion $(0, 1)$, ayant la classe *inférieure à* α.

La proposition devient plus dificile lorsqu'on considère des éléments dits *canoniques* de classe α qui n'ont aucune partie parasite[28]). De tels éléments canoniques non homéomorphes l'un à l'autre sont en nombre *deux* dans la classe 1, en nombre *deux* dans la classe 2. On ne sait pas leur nombre dans la classe 3. Le problème de détermination du nombre des éléments canoniques non homéomorphes deux à deux dans chaque classe K_α de la classification de MM. Baire—de la Vallée Poussin est le plus beau problème de la Théorie des fonctions contemporaine[29]).

[28]) Nous dirons qu'un élément E de classe α a une *partie parasite* s'il existe un ensemble Θ de classe β inférieure à α tel que la partie commune $\Theta \times E$ soit de classe γ intermédiaire entre α et β, $\beta < \gamma < \alpha$. A propos de cette définition, je dois signaler ma conversation avec M. B. Knaster.

[29]) M^lle^ Keldych qui a considéré les difficultés de ce problème important m'a communiqué que son sentiment est tel qu'il existe, dans chaque classe K_α, un nombre *fini* (et d'ailleurs très limité) des éléments canoniques non homéomorphes deux à deux de sorte que tout ensemble mesurable B de classe α est une somme d'une infinité dénombrable d'éléments canoniques de classes $\leqslant \alpha$.

Cette idée du choix, dans chaque classe K_α, d'un nombre *fini* d'éléments canoniques aux types différents de homéomorphie et de la représentation de chaque ensemble mesurable B comme une somme dénombrable d'éléments de types choisis présente un vif intérêt.

Un autre problème consiste à se demander s'il existe ou non un complémentaire $\mathcal{E}$ d'un élément de classe α *voisin* du complémentaire E d'un élément de classe α, ce complémentaire E étant *donné à l'avance.* Nous avons démontré précédemment qu'il y a, dans chaque classe K_α, *des* couples $(E, \mathcal{E})$ de complémentaires d'éléments de classe α *voisins* l'un de l'autre, c'est-à-dire sans points communs et non séparables (α). La question se pose de savoir s'il est possible ou non de prendre *arbitrairement* le complémentaire E.

Après d'avoir exposé les principes de la théorie indiquée des ensembles mesurables B, nous allons reprendre l'analogie entre des ensembles mesurables B et les ensembles analytiques non mesurables B. Voici quelques couples des propositions duales:

Il existe un élément de classe α plan universel.	Il existe un ensemble analytique plan universel.
Premier petit principe. — Deux éléments de classe α n'ayant aucun point commun sont toujours séparables (α).	*Premier principe.* — Deux ensembles analytiques n'ayant aucun point commun sont toujours séparables B.
Deuxième petit principe. — Si E_1 et E_2 sont deux éléments de classe α, les ensembles R_1 et R_2 que l'on obtient en supprimant de E_1 et E_2 leur partie commune, sont toujours simultanément séparables $(C\alpha)$.	*Deuxième principe.* — Si E_1 et E_2 sont deux ensembles analytiques, les ensembles R_1 et R_2 que l'on obtient en supprimant de E_1 et E_2 leur partie commune, sont toujours séparables (CA).
Il existe des couples (E_1, E_2) des complémentaires d'éléments de classe α n'ayant aucun point commun et non séparables (α).	Il existe des couples (E_1, E_2) des complémentaires analytiques n'ayant aucun point commun et non séparables B.

Il est impossible de ne pas être frappé de l'analogie que présentent les éléments de classe α et les ensembles analytiques non mesurables B. Dans les deux cas, nous avons les mêmes propositions. Nous sommes ainsi naturellement amenés à considérer un ensemble analytique non mesurable B comme un élément de classe α colossalement grande de manière qu'il n'existe aucune possibilité humaine ni d'écrire ce nombre α, ni de le définir au moyen d'un système fini de notations ou de conventions. N'oublions pas que le symbole Ω que les idéalistes ont l'habitude d'écrire n'a en fait autre but que de marquer l'impossibilité de numéroter au moyen des entiers positifs tous les nombres transfinis inférieurs à Ω. Or, cette impossibilité peut être ou bien *objective*, ou bien *humaine*. Mais, quel que soit l'intérêt métaphysique à faire cette distinction, *pratiquement* c'est la même chose, *puisqu'on tire, dans les deux cas, les mêmes chaînes de déductions*

Cela nous explique l'analogie indiquée.

Mais il y a de plus: dans les deux cas, nous avons non seulement les mêmes énoncés, mais les *mêmes démonstrations*. C'est là le point capital, pratiquement très important, puisque pour étendre nos connaissances des ensembles analytiques non mesurables B, il nous suffit d'approfondir nos connaissances des ensembles mesurables B et, ensuite, de transformer, suivant les règles de dualité, les résultats obtenus sur les ensembles mesurables B en propositions relatives aux ensembles analytiques les plus généraux. A ce point de vue, à chaque pas dans l'étude des ensembles mesurables B correspond un progrès dans nos connaissances des ensembles analytiques.

Pour donner des exemples, nous considérons les premier et deuxième principes de la théorie des ensembles analytiques et, pour fixer les idées, nous nous bornons à la considération des ensembles analytiques *linéaires*.

Tout d'abord il faut mettre un ensemble analytique donné E sous forme d'un élément de classe Ω; nous supposons que E est situé sur l'axe $0X$.

Pour ceci, il suffit de prendre, dans le plan $X0Y$, un crible C formé d'un infinité dénombrable d'intervalles rectilignes parallèles à l'axe $0X$. On sait [30]) que la droite $x = x_0$ parallèlle à l'axe $0Y$ et menée par un point x_0 de l'ensemble E coupe le crible C en un ensemble dénombrable e_{x_0} qui n'est pas bien ordonné si nous con-

[30]) Les lecteurs désireux de renseignements plus techniques pourront se reporter à mon Mémoire *Sur les ensembles analytiques* (*Fundamenta Mathematicae*, t. X, 1926), ou à mes *Leçons sur les ensembles analytiques* qui paraîtront chez Gauthier-Villars.

venons que le rang des points de e_{x_0} soit conforme à la direction positive de l'axe $0Y$. Au contraire, si x_0 n'appartient pas à E, l'ensemble e_{x_0} est bien ordonné, en adoptant la même convention, et correspond à un nombre fini ou transfini β_{x_0} bien déterminé de seconde classe de G. Cantor.

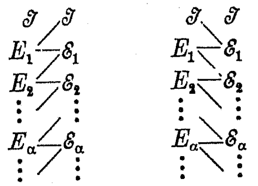
Cela posé, désignons par E_α l'ensemble de tous les points x_0 de l'axe $0X$ en lesquels l'ensemble e_{x_0} *ou bien* n'est pas bien ordonné suivant la direction positive de l'axe $0Y$, *ou bien* est bien ordonné et $\beta_{x_0} \geqslant \alpha$. On sait que E_α ainsi défini est *mesurable* B et que, si E est non mesurable B, la suite décroissante

$$\mathcal{J} = F_0 > F_1 > E_2 > \ldots > E_\omega > \ldots > E_\alpha > \ldots / \Omega$$

est essentiellement transfinie (non dénombrable). Cela veut dire que cette suite se prolonge *transfiniment* sans présenter, à partir d'un certain rang γ, l'identité $E_\gamma = E_{\gamma+1} = E_{\gamma+2} = \ldots$

On sait que l'ensemble analytique donné E est la partie commune à tous les termes E_α de la suite transfinie considérée.

Cela posé, pour avoir le *premier principe* de la théorie des ensembles analytiques, il nous suffit de prendre deux schèmes verticaux précédents prolongés trasfiniment.



et de former deux séries transfinies „alternées"

$$\mathcal{J} \cdot E_1 - E_1 \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1 E_2 - E_2 \cdot \mathcal{E}_2 + \ldots$$

et

$$\mathcal{J} \cdot \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 E_1 + E_1 \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2 E_2 + \ldots$$

On démontre que les sommes H_1 et H_2 de ces deux séries sont des ensembles *mesurables* B.

Pour avoir le *deuxième principe*, il nous suffit de former, comme dans le cas du petit principe correspondant, deux séries transfinies „à termes positifs"

$$(\mathcal{J} \cdot E_1 - E_1 \mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_1 E_2 - E_2 \mathcal{E}_2) + \ldots$$

et

$$(\mathcal{J} \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1 E_1) + (E_1 \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2 E_2) + \ldots$$

On démontre que les sommes H_1 et H_2 de ces deux séries sont des *complémentaires analytiques*. Ceci achève le démonstration des deux principes.

Ces démonstrations transfinis étant obtenus, il est facile, dans l'étape ultérieure et secondaire du travail, à supprimer toutes les traces du transfini et, par suite, à donner une démonstration rigoureuse du deuxième principe où le transfini n'intervient pas explicitement. C'est cette démonstration qui sera publiée dans un autre article de ce Journal.

Nous compléterons ces réflexions par la remarque suivante. Nous avons dit que pour chaque élément E de classe α donné à l'avance il existe un élément $\mathcal{E}$ de classe α voisin de E sauf le cas où CE est dénombrable. La proposition duale est une proposition d'impossibilité, puisque ceci suppose que nous pouvons indiquer un point n'appartenant pas à l'ensemble analytique E donné.

Or, il serait fort intéressant de reconnaître la nature du problème dual du problème précédemment posé et relatif aux complémentaires d'éléments de classe α.

Ce problème dual:

étant donné un complémentaire analytique E, trouver un autre complémentaire analytique $\mathcal{E}$ n'ayant aucun point commun avec E et non séparable B de E peut avoir, dans le domaine de la Logique abstraite, une solution bien déterminée, puisque nous avons ici *deux* êtres négatifs, E et $\mathcal{E}$, dont les relations peuvent être bien déterminées, dans le domaine de la Logique abstraite.

Sur les ε-séparations irréductibles.

Par

G. T. Whyburn[1]) (Baltimore).

Dans son „Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes. Deuxième Partie“ [2]), que je viens de voir pour la première fois, Urysohn a posé les problèmes suivants:

1) *Quels sont les continus C de dimension n qui admettent, pour tout point $x \subset C$ et tout $\varepsilon > 0$, une ε-séparation irréductible*[3]) *effectuée par un ensemble de dimension $n-1$?*

2) *En particulier, existe-il des lignes Cantoriennes C, autres que les arcs simples ab, satisfaisant à l'ensemble des deux conditions suivantes:*

α) C est un continu irréductible ab;

β) quels que soit $x \subset C$ et $\varepsilon > 0$, il existe une ε-séparation irréductible du point x effectuée par un ensemble B de dimension 0?

Dans cette note je vais prouver que la réponse à la première question est: „*les continus localement connexes*“, et à la deuxième elle est *negative*.

J'aurai besoin des deux théorèmes suivants qu'on trouve dans mon article „Concerning Irreducible Cuttings of Continua“ [4]).

[1]) Fellow of the John Simon Guggenheim Memorial Foundation.

[2]) Verhand. der Akad. te Amsterdam, XIII. nº. 4, voir pp. 147, 148.

[3]) Nous disons, avec Urysohn, qu'un sous-ensemble B d'un continu C est un ensemble ε-séparant le point x, ou que l'ensemble B effectue une ε-séparation du point x dans C, si $C = A + B + D$, où les ensembles A et D sont séparés, $A \supset x$, et $\delta(A+B) < \varepsilon$. L'ensemble B est dit ensemble ε-séparant irréductible, si aucun vrai sous-ensemble de B n'est un ensemble ε-séparant le point x.

[4]) Ce journal, t. 13, pp. 42—57; voir théorèmes 2 et 10 respectivement. I) est un peu plus général que le théorème 2, mais la démonstration donnée dans mon article pour le théorème 2 suffit sans changements pour démontrer I).