$[\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})]-\aleph(\mathfrak{m})$ existe, donc qu'il existe un seul nombre cardinal $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})=\mathfrak{p}+\aleph(\mathfrak{m})$. Or, cette formule est vraie pour $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$ et pour $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})$ (puisque $\aleph(\mathfrak{m})+\aleph(\mathfrak{m})=\aleph(\mathfrak{m})$). On aurait donc $\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})=\mathfrak{m}$, d'où $\aleph(\mathfrak{m})\leqslant\mathfrak{m}$, contrairement à la définition du nombre $\aleph(\mathfrak{m})$. On n'a donc pas $\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})>\aleph(\mathfrak{m})$; par conséquent $\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})=\aleph(\mathfrak{m})$, d'où $\mathfrak{m}\leqslant\aleph(\mathfrak{m})$, ce qui prouve que $\mathfrak{m}$ est un aleph. Notre hypothèse entraîne donc que tout nombre cardinal non fini est un aleph, d'où résulte, comme on sait, l'axiome du choix.

Notre théorème est ainsi démontré.

Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques [1]).

Par

Edward Marczewski (Wrocław).

Dans les espaces métriques, *la séparabilité* peut être formulée, comme on sait, de diverses manières équivalentes, p. ex. comme l'existence d'une base dénombrable d'ensembles ouverts, l'existence d'un ensemble dénombrable partout dense, la dénombrabilité de toute famille d'ensembles ouverts disjoints, etc.

Par contre, dans les espaces topologiques plus généraux, ces propriétés cessent d'être équivalentes. Ce phenomène se présente d'une façon naturelle surtout dans l'étude *des produits cartésiens transfinis*.

J'examine dans ce travail d'abord plusieurs propriétés des espaces topologiques généraux qui dans les espaces métriques équivalent à la séparabilité (n⁰ 1); ensuite j'établis quelques théorèmes sur les produits cartésiens (n⁰ 2) et, enfin, je discute *l'invariance* des propriétés en question *envers la multiplication cartésienne* (n⁰ 3)[2]). Les résultats acquis entraînent en particulier quelques propriétés du discontinu généralisé de Cantor et de quelques autres espaces connus (3.4).

Espace topologique ou bien *espace* tout court est entendu ici comme un espace satisfaisant aux trois axiomes énoncés dans la *Topologie I* de M. Kuratowski [1, p. 15] ou, ce qui revient au même, comme „T_1-Raum" au sens de Alexandroff-Hopf [1, p. 59]. En outre, la démonstration d'une partie du théorème 3.2 fait appel à l'existence dans l'espace de deux ensembles ouverts disjoints et non vides, ce qui a lieu en particulier dans chaque „T_2-Raum" (cf. Alexandroff-Hopf [1, p. 67]) ne se réduisant pas à un point. Dans le n⁰ 3 tout entier, on suppose qu'aucun des espaces considérés $X(t)$ ne se réduit à un point.

---

[1]) Les résultats principaux de ce travail ont été présentés dans une séance organisée par la Faculté des Sciences de l'Université de Lwów en mai 1941.

[2]) Rappelons ici que, pour la bicompacité, le problème analogue est résolu par la généralisation de E. Čech [1, p. 830] du théorème de A. Tychonoff [1], d'après laquelle la bicompacité est un invariant de la multiplication cartésienne transfinie.

1. Séparabilité et quelques propriétés apparentées d'espaces topologiques.

1.1. Propriétés (s) et (k). Considérons d'abord la condition suivante pour une classe $\boldsymbol{K}$ d'ensembles:

(s) Chaque sous-classe de $\boldsymbol{K}$ d'ensembles disjoints deux à deux est au plus dénombrable.

Cette condition se présente p. ex. dans le problème bien connu de Souslin[3]), dans certains théorèmes concernant l'opération (A), dans des recherches sur les produits cartésiens, etc.[4]).

Dans ce travail, nous considérons également la condition:

(k) Chaque sous-classe indénombrable de $\boldsymbol{K}$ contient une sous-classe indénombrable d'ensembles qui ont des points communs deux à deux.

Évidemment:

(i) *Chaque classe ayant la propriété* (k) *possède aussi la propriété* (s).

L'attention sur le rôle de la propriété (k) dans divers problèmes de la théorie des ensembles et de topologie a été attirée par M. B. Knaster. En particulier, à la suite d'un problème posé par lui et résolu par M. W. Sierpiński, on sait qu'il existe une classe d'ensembles jouissant de la propriété (s) et ne jouissant pas de la propriété (k)[5]).

Cependant, lorsqu'on cherche à constater si les diverses classes connues ayant la propriété (s) possèdent la propriété (k), on est conduit en général soit à une réponse positive, soit à un problème non résolu. Ainsi B. Knaster a démontré que pour la classe $\boldsymbol{K}$ des intervalles d'un ensemble ordonné continu, le problème de savoir si (s) entraîne (k) équivaut à celui de Souslin[6]). Cf. aussi les questions posées plus loin (1.1, p. 130; 1.2, p. 131).

Dans certains raisonnements, il est commode d'énoncer la condition (k) sous une autre forme. En effet:

(ii) *Pour qu'une classe* $\boldsymbol{K}$ *ait la propriété* (k), *il faut et il suffit qu'il existe dans chaque suite transfinie* $\{E_\xi\}$ *de type* Ω *d'ensembles non vides appartenant à* $\boldsymbol{K}$ *une suite extraite* $\{E_{\alpha_\xi}\}$ *de type* Ω *telle que* $E_{\alpha_\eta}\cdot E_{\alpha_\zeta}\neq 0$ *pour* $\eta<\zeta<\Omega$.

[3]) Voir p. ex. Sierpiński [1], p. 152.
[4]) Voir mes travaux [1, p. 233], [4] et [5].
[5]) Sierpiński [2], et ma note [5].
[6]) Knaster [1].

La suffisance de cette condition est évidente et pour démontrer sa nécessité, distinguons deux cas:

1° Il existe un terme de la suite $\{E_\xi\}$ qui se repète une infinité indénombrable de fois. Autrement dit, il existe une suite extraite $\{E_{\alpha_\xi}\}$ de type Ω, telle que $E_{\alpha_\eta}=E_{\alpha_\zeta}$ pour $\eta<\zeta<\Omega$. On a donc a fortiori $E_{\alpha_\eta}\cdot E_{\alpha_\zeta}\neq 0$.

2° Chaque terme de la suite $\{E_\xi\}$ se repète au plus une infinité dénombrable de fois. Par conséquent, il existe une suite extraite $\{E_{\beta_\xi}\}$ de type Ω d'ensembles différents deux à deux. En vertu de la propriété (k), il existe donc une suite extraite $\{E_{\beta_{\gamma_\xi}}\}$ de type Ω d'ensembles qui ont des points communs deux à deux. En posant $\alpha_\xi=\beta_{\gamma_\xi}$, nous obtenons la suite $\{E_{\alpha_\xi}\}$.

Démontrons maintenant, à titre d'exemple, que:

(iii) *La classe* $\boldsymbol{P}$ *des ensembles linéaires mesurables* (L), *de mesure positive, jouit de la propriété* (k).

Soient $\{I_n\}$ la suite des intervalles à extrémités rationnelles et $\boldsymbol{P}_n$ la classe des ensembles mesurables E tels que

$$(*)\qquad \operatorname{mes}(EI_n)>{}^1/_2 \operatorname{mes} I_n.$$

Comme on le sait, il existe pour chaque E mesurable de mesure positive un entier positif n tel qu'on ait (*); en d'autres termes: $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2+\dots$

Si deux ensembles E_1 et E_2 appartiennent à la même classe $\boldsymbol{P}_n$, ils ont des points communs; en effet, l'inégalité (*) pour $E=E_1$ et $E=E_2$ donne:

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}(E_1E_2)\geqslant \operatorname{mes}(E_1E_2I_n)&=\operatorname{mes}(I_n)-\operatorname{mes}[(I_n-E_1)+(I_n-E_2)]\geqslant\\ &\geqslant \operatorname{mes}(I_n)-\operatorname{mes}(I_n-E_1)-\operatorname{mes}(I_n-E_2)>0.\end{aligned}$$

Soit maintenant $\boldsymbol{M}$ une classe indénombrable contenue dans $\boldsymbol{P}$. Il existe donc un entier n_0 tel que la classe $\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}_{n_0}$ soit encore indénombrable et nous savons déjà que les ensembles appartenant à $\boldsymbol{P}_{n_0}$ ont des points communs deux à deux.

Appelons *mesure* chaque fonction μ d'ensemble, dénombrablement additive, non négative et finie, définie pour une classe $\boldsymbol{M}$ d'ensembles dénombrablement additive et complémentative. Une mesure μ s'appelle ***séparable*** lorsqu'il existe une suite d'ensembles $V_n\in\boldsymbol{M}$ telle que, pour chaque $\eta>0$ et chaque $E\in\boldsymbol{M}$ il existe un entier n tel que $\mu[(V_n-E)+(E-V_n)]<\eta$[7]).

[7]) Cf. p. ex. mes notes [2] et [3].

Soit maintenant $\boldsymbol{P}$ la classe des ensembles appartenant à $\boldsymbol{M}$, de mesure μ positive. On démontre aisément que *la classe* $\boldsymbol{P}$ *possède la propriété* (s). En outre, il est facile de montrer que *pour chaque mesure* μ *séparable*, $\boldsymbol{P}$ *est une classe à propriété* (k) [8]. Je ne sais pas si l'hypothèse de la séparabilité de μ peut être omise.

1.2. La propriété (B) et ses conséquences: (D), (K) et (S). Appelons *base* (ou bien *classe des entourages*) d'un espace topologique X chaque classe d'ensembles ouverts telle que chaque ensemble ouvert dans X soit somme de certains d'entre eux. Considérons les propriétés suivantes d'un espace topologique X:

(B) Il existe une base au plus dénombrable de X.

(D) Il existe dans X un ensemble au plus dénombrable partout dense.

(K) La classe $\boldsymbol{K}$ des ensembles ouverts dans X possède la propriété (k).

(S) La classe $\boldsymbol{K}$ des ensembles ouverts dans X possède la propriété (s) [9].

Remarquons — ce qui nous sera utile maintes fois — qu'en remplaçant dans (K) et (S) la classe de tous les ensembles ouverts par la classe des entourages, on obtient les propriétés équivalentes à (K) et (S).

Voici le théorème qui établit les implications entre ces quatre propriétés:

(i) $$(B) \to (D) \to (K) \to (S).$$

La relation: $(B) \to (D)$, d'ailleurs évidente, est bien connue [10].

La relation: $(D) \to (K)$ résulte du fait que P étant un ensemble au plus dénombrable, dense dans X, il existe dans chaque classe indénombrable $\boldsymbol{R}$ d'ensembles ouverts dans X un point p de P appartenant à une infinité indénombrable d'ensembles de $\boldsymbol{R}$.

Enfin, la relation $(K) \to (S)$ résulte de 1.1 (i).

On voit aisément que:

(ii) *Pour les espaces* X *métriques* $(S) \to (B)$ [11].

[8]) La démonstration peut être directe, mais elle peut aussi s'appuyer sur la démonstration du théorème (iii) et sur le théorème énoncé dans ma note [2].

[9]) Dans ma note [4], les espaces à propriété (B) s'appellent *séparables* et ceux à propriété (S) — *faiblement séparables*.

[10]) Cf. p. ex. Alexandroff-Hopf [1], p. 31.

[11]) Cf. p. ex. Hausdorff [2], p. 128.

Par conséquent, pour les espaces métriques, toutes les propriétés en question équivalent à la propriété (D) qui, dans ce cas, porte le nom de *séparabilité*. Pour les espaces topologiques généraux, cette équivalence tombe en défaut, comme le montre p. ex. le théorème 3.4 (voir aussi 1.3). Cependant il est à noter que nous ne connaissons aucun espace topologique ayant la propriété (S) mais dépourvu de la propriété (K).

Les propriétés en question sont invariantes envers certaines transformations:

(iii) *La propriété* (B) *est invariante envers les transformations ouvertes* [12]).

(iv-vi) *Les propriétés* (D), (K) *et* (S) *sont invariantes envers les transformations continues.*

En effet, chaque transformation ouverte f d'un espace X transforme chaque base de X en une base de $f(X)$. Pareillement, chaque transformation continue f d'un espace X transforme chaque ensemble dense dans X en un ensemble dense dans $f(X)$. Les démonstrations pour le cas des propriétés (K) et (S) résultent directement de propriétés de l'opération de contre-image: f^{-1}.

Notons encore deux propositions évidentes concernant les propriétés (D) et (S):

(vii) *Si un ensemble* Y *dense dans l'espace* X *possède la propriété* (D), *l'espace* X *la possède également.*

(viii) *Chaque espace isolé ayant la propriété* (S) *est au plus dénombrable.*

Démontrons enfin que:

(ix) *Pour qu'un ensemble* Y *contenu dans un espace* X *possède la propriété* (S), *il faut et il suffit que sa fermeture* $\overline{Y}$ *dans* X *la possède.*

Évidemment, pour qu'un ensemble $Z \subset X$ ne possède pas la propriété (S), il faut et il suffit qu'il existe une classe indénombrable $\boldsymbol{H}$ d'ensembles ouverts dans X telle que pour chaque couple $G_1 \neq G_2$ d'ensembles appartenant à $\boldsymbol{H}$ on ait $G_1 G_2 Z = 0$.

[12]) Une fonction f, définie sur X, s'appelle *ouverte* dans X lorsqu'elle est continue dans X et lorsqu'elle transforme chaque ensemble ouvert en un ensemble ouvert dans $f(X)$. Il est à remarquer que la propriété (B) n'est pas invariante envers les transformations continues. Cf. Alexandroff-Hopf [1], p. 99.

Par conséquent, la proposition (ix) résulte immédiatement du fait que pour chaque ensemble G ouvert dans X les conditions $GY=0$ et $G\overline{Y}=0$ sont équivalentes.

1.3. Autres conséquences de la propriété (B). Outre les propriétés envisagées plus haut, on a formulé et étudié plusieurs propriétés qui résultent de (B) et qui, dans le cas des espaces métriques, lui sont équivalentes. Telle est p. ex. la propriété suivante:

$(\underline{M})$ Chaque suite transfinie strictement descendante d'ensembles ouverts est au plus dénombrable.

On en peut évidemment formuler plusieurs autres, même plus faibles que (S), mais entraînant encore (B) dans les espaces métriques. Citons-en la suivante, formulée par M. B. Knaster:

(G) Chaque classe de domaines fermés[13]) disjoints, dont la somme est un ensemble fermé et dont chacun est ouvert dans elle, est au plus dénombrable.

Or, on a les implications:

(i) *Pour les espaces topologiques*

$$(B)\rightarrow(\underline{M})\rightarrow(D)\rightarrow(K)\rightarrow(S)\rightarrow(G)$$

et

(ii) *Pour les espaces métriques*

$$(G)\rightarrow(B).$$

L'implication $(B)\rightarrow(\underline{M})$ est bien connue[14]). Nous allons démontrer que $(\underline{M})\rightarrow(D)$.

Soit X un espace ayant la propriété $(\underline{M})$. Définissons par induction transfinie une suite transfinie de points $p_\xi \in X$ (où $0\leqslant\xi<\alpha$) et une suite P_ξ d'ensembles (ou $0\leqslant\xi\leqslant\alpha$) tels que

(a) P_η est l'ensemble des p_ξ tels que $\xi<\eta$;

(b) p_ξ appartient à l'intérieur de l'ensemble $X-P_\xi$;

(c) l'intérieur de l'ensemble $X-P_\alpha$ est vide, c.-à-d. l'ensemble P_α est dense dans X.

Il résulte de (a) et (b) que les intérieurs de $X-P_\xi$ constituent une suite strictement descendante d'ensembles ouverts; on a donc $\overline{\overline{\alpha}}\leqslant\aleph_0$ en vertu de $(\underline{M})$. Ainsi, l'ensemble P_α est au plus dénombrable et d'après (c) dense dans X, l'espace X possède donc la propriété (D).

Les implications: $(D)\rightarrow(K)\rightarrow(S)$ ont été démontrées plus haut [1.2 (i)]; l'implication $(S)\rightarrow(G)$ est évidente.

Pour montrer que l'on a $(G)\rightarrow(B)$ dans les espaces métriques, remarquons qu'il existe pour tout espace X non séparable un nombre $\delta>0$ et un ensemble indénombrable $Z\subset X$ tels que $\varrho(p,q)>\delta$ pour tout couple $p,q\in Z$. On voit aisément que les fermetures des sphères ouvertes de rayon $\delta/3$ et de centres appartenant à Z constituent une classe indénombrable de domaines fermés à somme fermée F et dont chacun est ouvert dans F.

[13]) c.à-d. de fermetures d'ensembles ouverts.

[14]) Cf. p. ex. Alexandroff-Hopf [1], p. 79.

Il est à noter qu'aucune des implications (i) ne peut être remplacée par l'équivalence, seul le problème de l'équivalence entre (S) et (K) étant ouvert (cf. 1.2).

Ainsi, les théorèmes 3.3 et 3.2 montrent que (K) *n'entraîne pas* (D) et les théorèmes 3.2, 3.1 (i), et 1.3 (iii) montrent que (D) *n'entraîne* pas $(\underline{M})$. L'exemple dû à P. Urysohn[15]) d'un espace topologique dénombrable (donc ayant la propriété $(\underline{M})$, mais qui est dépourvu de la propriété (B), montre que $(\underline{M})$ *n'entraîne pas* (B). Enfin, on démontre facilement que l'espace topologique ordonné, formé de tous les nombres ordinaux $\xi<\Omega$ (avec des entourages $\xi<\beta$, $\alpha<\xi<\beta$, $\alpha<\xi$) *a la propriété* (G) *sans posséder* (S).

Il existe cependant des propriétés intermédiaires entre (B) et (G) qui n'entrent pas dans la chaîne (i). Telle est p. ex. la propriété

(I) Chaque ensemble isolé est au plus dénombrable.

On montre aisément que:

(iii) $(\underline{M})\rightarrow(I)\rightarrow(S)$.

Or, les propriétés (D) et (I) sont indépendantes: d'après le théorème 3.2 (ou bien 3.4) et 3.1 (i), le discontinu généralisé de Cantor possède *la propriété* (D) *sans avoir la propriété* (I); telle est aussi l'espace construit par M. Niemytzki[16]); d'autre part, l'espace suivant $\mathfrak{A}$ *possède la propriété* (I) *sans avoir la propriété* (D). Soit $\mathfrak{A}$ l'espace composé de points de la droite dans lequel chaque ensemble de la forme $V=J-P$, où J est un intervalle aux extrémités rationelles et P un ensemble au plus dénombrable, est considéré comme entourage de ses points. Dans cet espace, la notion de point d'accumulation et celle de point de condensation coïncident avec celle de point de condensation au sens de la topologie ordinaire. Il en résulte directement que chaque ensemble dénombrable est fermé dans $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ ne possède donc pas la propriété (D)) et chaque ensemble indénombrable contient des points de condensation ($\mathfrak{A}$ jouit donc de la propriété (I)).

2. Produits cartésiens.

2.1. Produits cartésiens d'ensembles. Soit X une fonction qui fait correspondre à chaque élément t d'un ensemble fixe T un ensemble $X(t)$. L'ensemble des fonctions x définies sur T et telles que $x(t)\in X(t)$ pour chaque $t\in T$ s'appelle *produit cartésien* des ensembles $X(t)$. Il est désigné par X^T.

Dans le cas, où T est l'ensemble des nombres ordinaux $0<\tau<\alpha$, on emploie d'ordinaire les termes et les notations des suites au lieu de ceux des fonctions. On écrit donc dans ce cas respectivement X_τ, x_τ et $X_1\times X_2\times\ldots\times X_\tau\times\ldots$ au lieu de $X(t)$, $x(t)$ et X^T.

Les ensembles $X(t)$ s'appellent *axes de coordonnées* et l'élément $x(t)$ — *la t-ième coordonnée* de $x\in X^T$. La t-ième coordonnée de x

[15]) Urysohn [1], p. 288-290.

[16]) Alexandroff-Hopf [1], p. 31.

sera désignée également par $p_t(x)$. La fonction p_t s'appelle *la projection sur le t-ième axe des coordonnées* et l'ensemble $p_t(E)$ (où $E \subset X^T$) s'appelle *projection de E sur cet axe.*

Désignons encore par $Q(t,E)$, où $t \in T$ et $E \subset X(t)$, l'ensemble des $x \in X^T$ tels que $x(t) \in E$; nous l'appellerons *ensemble cylindrique correspondant au t-ième axe et à l'ensemble E.*

On constate aisément que l'opération $Q(t,E)$ est inverse à celle de la projection:

(i) $p_t^{-1}(E) = Q(t,E)$ *pour chaque* $E \subset X(t)$.

On voit aussi que:

(ii) $p_t(X^T) = X(t)$; $Q[t, X(t)] = X^T$; $Q[t, 0] = 0$.

(iii) $Q(t,A) \cdot Q(t,B) = Q(t,AB)$ *pour* $A+B \subset X(t)$.

(iv) *Si* $t_i \in T$ *sont distincts et* $0 \neq E_i \subset X(t_i)$, *on a*

$$Q(t_1,E_1) \cdot Q(t_2,E_2) \cdot \ldots \cdot Q(t_n,E_n) \neq 0.$$

(v) *Si* $t_i \in T$ *sont distincts,* $0 \neq E_i \subset X(t_i)$ *et*

$$E = Q(t_1,E_1) \cdot Q(t_2,E_2) \cdot \ldots \cdot Q(t_n,E_n),$$

on a

$$p_t(E) = \begin{cases} E_i & \textit{pour } t = t_i \\ X(t) & \textit{pour } t \neq t_1, t_2, \ldots, t_n. \end{cases}$$

Nous allons démontrer encore que:

(vi) *Si* $A = Q(t_1,A_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_k,A_k)$, $B = Q(u_1,B_1) \cdot \ldots \cdot Q(u_l,B_l)$ *(où* $t_i \neq t_j$ *et* $u_i \neq u_j$ *pour* $i \neq j$*) et si chaque facteur de A a des points communs avec chaque facteur de B, alors* $AB \neq 0$.

En effet, (iii) permet de transformer le produit

$$AB = Q(t_1,A_1) \cdot \ldots \cdot Q(t_k,A_k) \cdot Q(u_1,B_1) \cdot \ldots \cdot Q(u_l,B_l)$$

de façon que chacun de facteurs soit un ensemble cylindrique correspondant à une autre axe; reste à appliquer (ii) et (iv).

2.2. Produits cartésiens d'espaces topologiques. Lorsque les ensembles $X(t)$ sont des espaces topologiques, l'ensemble X^T sera considéré également comme un espace topologique, en entendant chaque ensemble

$$(*) \qquad V = Q(t_1,G_1) \cdot Q(t_2,G_2) \cdot \ldots \cdot Q(t_n,G_n)$$

où G_i est ouvert (non vide) dans $X(t_i)$, comme *entourage* de chaque point $x \in V$. De plus, conformément à 2.1 (ii) et (iii) chaque entourage peut être représenté comme produit de la forme (*), de manière que

tous les t_i soient différents et que $G_i \neq X(t_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Nous dirons alors que cet entourage V est *d'ordre n.* Cette représentation est univoque (à l'ordre des facteurs près).

Dans la multiplication cartésienne, les axes qui se réduisent à un seul point peuvent être omis:

(i) *Soient* X^T *le produit cartésien des espaces topologiques* $X(t)$ *et* U *un sous-ensemble non vide de* T *tel que pour* $t \in T - U$ *l'ensemble* $X(t)$ *se réduise à un seul point. Les espaces* X^T *et* X^U *sont alors homéomorphes.*

En effet, on voit aisément que la fonction qui fait correspondre à chaque $x \in X^T$ un $y \in X^U$ tel que $x(t) = y(t)$ pour $t \in U$ est une homéomorphie.

Notons encore que:

(ii) *La projection* p_t *est une transformation ouverte de* X^T.

La transformation p_t est, en effet, continue, car on a

$$p_t^{-1}(G) = Q(t,G)$$

(d'après 2.1 (i)) pour chaque ensemble G ouvert dans $X(t)$; or, l'ensemble $Q(t,G)$ est ouvert dans X^T. Il reste donc à montrer que V étant un entourage dans l'espace X^T, l'ensemble $p_t(V)$ est ouvert dans $X(t)$; or, cela résulte directement de 2.1 (v).

Les propositions (ii) et 2.1 (ii) montrent que:

(iii) *Pour chaque* $t \in T$, *l'ensemble* $X(t)$ *s'obtient à partir de* X^T *par une transformation ouverte.*

Remarquons enfin qu'en appliquant la définition de l'entourage dans les produits cartésiens, on obtient facilement la proposition:

(iv) *Pour qu'un produit cartésien* Z^T *d'ensembles* $Z(t) \subset X(t)$ *soit dense dans* X^T, *il faut et il suffit que pour chaque* $t \in T$ *l'ensemble* $Z(t)$ *soit dense dans* $X(t)$.

2.3. Transformations continues[17]). Soit f une transformation d'un espace topologique X en sous-ensemble d'un produit cartésien Y^T. Nous allons démontrer d'abord que, pour que la transformation f soit continue, il faut et il suffit que chaque coordonnée du point $f(x)$ varie d'une façon continue. En d'autres termes:

[17]) Les théorèmes qui suivent sont des généralisations faciles de ceux que M. C. Kuratowski a établis d'une façon si élégante pour les produits cartésiens dénombrables d'espaces métriques dans son livre [1], p. 79 et 149.

(i) *Pour qu'une fonction f qui fait correspondre à chaque point x de l'espace topologique X un point y du produit cartésien Y^T des espaces topologiques $Y(t)$ soit continue, il faut et il suffit que $p_t[f(x)]$ soit pour chaque $t \in T$ une fonction continue de x.*

La nécessité de cette condition résulte du fait que la fonction $p_t[f(x)]$ est superposition de la fonction f, continue par hypothèse, et de la fonction p_t, continue d'après 2.2 (ii).

Pour en démontrer la suffisance, posons $f_t(x) = p_t[f(x)]$ et remarquons qu'en vertu de 2.1 (i):

$$f^{-1}[Q(t,G)] = f^{-1}[p_t^{-1}(G)] = f_t^{-1}(G),$$

d'où, pour chaque entourage

$$V = Q(t_1, G_1) \cdot Q(t_2, G_2) \cdot \ldots \cdot Q(t_n, G_n),$$

on a

$$f^{-1}(V) = f_{t_1}^{-1}(G_1) \cdot f_{t_2}^{-1}(G_2) \cdot \ldots \cdot f_{t_n}^{-1}(G_n).$$

Les fonctions f_{t_i} étant continues par hypothèse, l'ensemble $f^{-1}(V)$ est ouvert, ce qui entraîne la continuité de f.

Nous allons démontrer à l'aide de (i) que:

(ii) *Les g_t étant des fonctions continues, définies respectivement dans les espaces $X(t)$, où $t \in T$, et admettant comme valeurs des points de $Y(t)$, la fonction f qui fait correspondre à chaque $x \in X^T$ un élément $f(x) \in Y^T$ tel que*

$$p_t[f(x)] = g_t[p_t(x)]$$

est continue.

En effet, la fonction $g_t[p_t(x)]$ est continue comme superposition des fonctions g_t et p_t. Reste à appliquer la proposition (i).

On conclut directement de (ii) que:

(iii) *Si, pour chaque $t \in T$, l'espace topologique $Y(t)$ est une image continue de l'espace topologique $X(t)$, le produit cartésien Y^T est une image continue de X^T.*

2.4. Discontinu généralisé de Cantor, espace de Tychonoff, espaces généralisés de Baire et de Fréchet. Les cas particulièrement importants du produit cartésien sont ceux où tous les axes de coordonnées $X(t)$ sont identiques et notamment, où ils coïncident avec: 1° le couple de deux points, p. ex. le couple C des nombres 0 et 1, 2° l'ensemble dénombrable isolé p. ex. l'ensemble N des nombres entiers positifs, 3° l'intervalle I des

nombres réels $0 \leqslant x \leqslant 1$, 4° l'ensemble R de tous les nombres réels. L'espace C^T s'appelle *discontinu généralisé de Cantor*; appelons N^T *espace généralisé de Baire*, I^T *espace de Tychonoff* [18]) et R^T *espace généralisé de Fréchet*. La puissance de l'ensemble T sera dite *l'ordre* de l'espace considéré. On constate aussitôt l'homéomorphie du discontinu généralisé de Cantor d'ordre dénombrable avec le discontinu ordinnaire de Cantor, de l'espace généralisé de Baire d'ordre dénombrable avec „l'espace 0-dimensionnel de Baire" [19]), de l'espace généralisé de Fréchet d'ordre n avec l'espace euclidien à n dimensions et enfin de l'espace généralisé de Fréchet d'ordre dénombrable avec l'espace E_ω défini par M. Fréchet [20]).

(i) *Le produit cartésien X^T d'espaces topologiques, dont aucun ne se réduit à un point, contient un ensemble homéomorphe au discontinu généralisé de Cantor C^T.*

Il suffit, en effet, de choisir dans chaque $X(t)$ un ensemble $Z(t)$ composé de deux points et de remarquer que l'ensemble Z^T est, en vertu de 2.3 (iii), homéomorphe à C^T.

(ii) *Le produit cartésien D^T d'espaces topologiques non vides au plus dénombrables est une image continue de l'espace généralisé de Baire N^T.*

Chaque espace au plus dénombrable étant image continue de l'espace dénombrable isolé N, il suffit d'appliquer 2.3 (iii).

3. Séparabilité dans les produits cartésiens.

Nous supposons dans ce numéro que chacun des espaces considérés $X(t)$ contient au moins deux points. La remarque 2.2 (i) permet d'ailleurs d'omettre cette restriction à l'aide de modifications évidentes des énoncés.

3.1. Propriété (B). Remarquons d'abord que:

(i) *Le produit cartésien X^T d'une infinité indénombrable d'espaces $X(t)$ contient un sous-ensemble isolé indénombrable* [21]).

En raison de 2.4 (i), il suffit de le démontrer pour le discontinu généralisé de Cantor C^T. Or, tous les $x \in C^T$ tels que $x(t) = 1$ pour un seul $t \in T$ constituent un sous-ensemble indénombrable isolé de C^T.

---

[18]) Tychonoff [1].

[19]) Cf. p. ex. Fréchet [1], p. 81.

[20]) Cf. p. ex. Fréchet [1], p. 118.

[21]) Dans les termes du n° 1.3, l'espace X^T ne possède pas la propriété (I). En vertu de 1.3 (iii), il ne jouit pas, à plus forte raison, de la propriété $(\underline{M})$.

L'invariance de la propriété (B) par rapport la multiplication cartésienne s'exprime par le

Théorème. *Pour qu'un produit cartésien X^T possède la propriété (B), il faut et il suffit que 1° chacun des espaces $X(t)$ la possède et 2° l'ensemble T soit au plus dénombrable.*

La nécessité de la condition 1° résulte de 2.2 (iii) et 1.2 (iii); celle de la condition 2° est une conséquence de (i) puisque dans chaque espace ayant la propriété (B) les ensembles isolés sont évidemment au plus dénombrables. La suffisance des conditions 1° et 2° résulte de la proposition: étant donné dans l'espace $X(n)$ une base $\boldsymbol{B}_n$, la classe des entourages

$$Q(1,V_1)\cdot Q(2,V_2)\cdot\ldots\cdot Q(m,V_m) \quad \text{où} \quad V_k \epsilon \boldsymbol{B}_k$$

constitue une base de l'espace X^T (T étant dans ce cas l'ensemble des entiers positifs) [22].

3.2. Propriété (D). Remarquons d'abord que

(i) *Le produit cartésien X^T d'espaces $X(t)$ ayant la propriété (D) contient un ensemble Y dense dans X^T et qui est une image continue de l'espace généralisé de Baire N^T.*

Il suffit de poser $Y=D^T$, où $D(t)$ est un sous-ensemble dénombrable dense dans $X(t)$ et d'appliquer 2.4 (ii) et 2.2 (iv).

Nous allons démontrer le lemme suivant:

(ii) *L'espace généralisé de Baire N^T d'ordre ne dépassant pas la puissance du continu possède la propriété (D).*

On peut supposer sans restreindre la généralité que T est un ensemble de nombres irrationnels de l'intervalle I. Désignons par $\boldsymbol{R}$ la classe des ensembles de la forme JT, où J est une somme d'un nombre fini d'intervalles à extremités rationnelles. Désignons encore par P l'ensemble des fonctions ν dont chacune: 1° est définie dans T, 2° n'admet que des valeurs entières positives, 3° admet chacune de ses valeurs sur un ensemble appartenant à $\boldsymbol{R}$, 4° n'admet qu'un nombre fini des valeurs.

L'ensemble P est évidemment un sous-ensemble dénombrable de N^T. Soit donc V un entourage quelqonque dans l'espace N^T:

$$V=Q(t_1,G_1)\cdot Q(t_2,G_2)\cdot\ldots\cdot Q(t_n,G_n),$$

où les t_i sont des éléments distincts de T et les G_i des sous-ensembles ouverts non vides de N. Désignons par m_i un élément quelconque de G_i. Il résulte facilement de la définition de P qu'il existe une fonction $\nu \epsilon P$ telle que $\nu(t_i)=m_i$ pour $i=1,2,\ldots,n$, donc telle que $\nu \epsilon V$, c. q. f. d.

[22]) Cf. Kuratowski [1], p. 147.

Théorème. *Pour qu'un produit cartésien X^T possède la propriété (D), il faut et il suffit que 1° chacun des espaces $X(t)$ la possède, 2° la puissance de l'ensemble T ne dépasse pas celle du continu.*

La suffisance des conditions 1° et 2° résulte de (i), (ii) et 1.2 (vii). La nécessité de la condition 1° est une conséquence de 1.2 (iv) et 2.2 (iii). Reste à établir la nécessité de la condition 2°.

Soit $D=(x_1,x_2,\ldots)$ un ensemble dénombrable dense dans X^T. Désignons pour chaque $t \epsilon T$ par $G_1(t)$ et $G_2(t)$ deux sous-ensembles disjoints ouverts dans $X(t)$ [23]. Posons pour chaque $t \epsilon T$:

$$y_n(t)=\begin{cases}0 & \text{lorsque} \quad x_n(t) \bar{\epsilon} G_1(t)\\ 1 & \text{lorsque} \quad x_n(t) \epsilon G_1(t).\end{cases}$$

Ainsi, à chaque $t \epsilon T$ vient correspondre une suite $\{y_n(t)\}$ composée de nombres 0 et 1. Il est facile de prouver qu'à deux t différents viennent correspondre des suites différentes. Soit en effet $t_1 \neq t_2$. L'ensemble D étant dense dans X^T, il existe un nombre m tel que

$$x_m \epsilon Q[t_1,G_1(t_1)]\cdot Q[t_2,G_2(t_2)];$$

on a par conséquent $x_m(t_1) \epsilon G_1(t_1)$, tandis que $x_m(t_2) \bar{\epsilon} G_1(t_2)$; en d'autres termes:

$$y_m(t_1)=1 \quad \text{et} \quad y_m(t_2)=0.$$

L'ensemble des suites dénombrables composées de 0 et 1 ayant la puissance du continu, l'ensemble T a au plus cette puissance, c. q. f. d.

3.3. Propriétés (K) et (S). La propriété (K) se montre invariante par rapport à la multiplication cartésienne, indépendamment de la puissance de l'ensemble T:

Théorème. *Pour que le produit cartésien X^T possède la propriété (K), il faut et il suffit que tous les espaces $X(t)$ la possèdent* [24].

La nécessité de la condition résulte de 1.2 (v) et 2.2 (iii).

Pour en établir la suffisance, il suffit, conformément à 1.1 (ii), de montrer que, $X(t)$ ayant la propriété (K), chaque suite $\{V_\xi\}$ de

[23]) Pour l'existence d'un tel couple d'ensemble ouverts, cf. l'Introduction.

[24]) Ce théorème présente une généralisation du théorème plus facile, démontré dans ma note [4], d'après lequel chaque produit cartésien d'espaces ayant la propriété (B) admet la propriété (S).

type Ω formée d'entourages (dans X^T) d'un ordre fixe m contient une suite partielle de type Ω formée d'entourages ayant des points communs deux à deux. Nous allons prouver d'abord que

(L_1). Chaque suite $\{V_\xi\}$ de type Ω d'entourages d'ordre m (dans X^T) contient une suite partielle $\{V_{\gamma_\xi}\}$ de type Ω formée d'entourages de la forme

$$V_{\gamma_\xi} = Q(t_1^\xi, G_1^\xi)\cdot Q(t_2^\xi, G_2^\xi)\cdot\ldots\cdot Q(t_m^\xi, G_m^\xi)$$

et telle que l'on ait

$$(1) \qquad Q(t_1^\eta, G_1^\eta)\cdot Q(t_k^\zeta, t_k^\zeta) \neq 0 \qquad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant m$$

quels que soient les indices $\eta < \zeta < \Omega$.

En effet, désignons par T_ξ l'ensemble $(t_1^\xi, t_2^\xi, \ldots, t_m^\xi)$, posons $U = T_0 + T_1 + \ldots + T_\xi + \ldots$ $(\zeta < \Omega)$ et distinguons deux cas: (I) il existe un $t \in U$ tel que $t \in T_\xi$ pour une infinité indénombrable de nombres ordinaux ξ et (II) chaque $t \in U$ appartient au plus à une infinité dénombrable de T_ξ.

Dans le cas (I), il existe donc un élément $u_1 \in U$ et une suite croissante de nombres ordinaux $\{\alpha_\xi\}$ de type Ω telle que $u_1 \in T_{\alpha_\xi}$ pour $\xi < \Omega$. En ordonnant convenablement les facteurs des entourages V_{α_ξ}, on peut écrire:

$$V_{\alpha_\xi} = Q(u_1, H_1^\xi)\cdot Q(u_2^\xi, H_2^\xi)\cdot\ldots\cdot Q(u_m^\xi, H_m^\xi),$$

où H_1^ξ désigne un sous-ensemble ouvert de $X(u_1)$, H_k^ξ — un sous-ensemble ouvert de $X(u_k^\xi)$ pour $2 \leqslant k \leqslant m$ et $u_1, u_2^\xi, \ldots, u_m^\xi$ désignent des éléments distincts de T_{α_ξ}.

L'espace $X(u_1)$ satisfaisant à (K), la suite $\{H_1^\xi\}$ admet une suite partielle $\{H_1^{\beta_\xi}\}$ de type Ω, telle que $H_1^{\beta_\eta}\cdot H_1^{\beta_\zeta} \neq 0$ pour tous $\eta < \zeta < \Omega$, donc que

$$(2) \qquad Q(u_1, H_1^{\beta_\eta})\cdot Q(u, H_1^{\beta_\zeta}) \neq 0.$$

En posant $\gamma_\xi = \alpha_{\beta_\xi}$, nous obtenons la suite $\{V_{\gamma_\xi}\}$ satisfaisant à la thèse de (L_1). En effet, pour $k=1$, l'égalité (1) est une conséquence de (2), tandis que pour $k>1$ elle résulte de la formule $t_1^\eta = u_1 \neq u_k^\xi$, car des ensembles cylindriques correspondants à des aux différents, possèdent toujours des points communs [2.1 (iv)].

Dans le cas (II), nous définirons la suite V_{γ_ξ} par induction transfinie. Posons $\gamma_0 = 0$ et désignons par γ_ξ où $0 < \xi < \Omega$ le plus petit nombre satisfaisant à la condition

$$T_{\gamma_\xi}\cdot \sum_{\eta<\xi} T_{\gamma_\eta} = 0.$$

Dans l'hypothèse du cas (II), un tel nombre γ_ξ existe. La suite γ_ξ, ainsi définie, satisfait à la condition $T_{\gamma_\eta}\cdot T_{\gamma_\zeta} = 0$ pour $\eta \neq \zeta$; en vertu de 2.1 (iv), elle vérifie donc la thèse de (L_1).

Ceci établi, nous allons déduire de (L_1) par induction une proposition générale (L_k) (où $1 \leqslant k \leqslant m$), qui, pour $k = m$, entraîne, en vertu de 2.1 (vi), le théorème à démontrer.

(L_k) Chaque suite $\{V_\xi\}$ de type Ω d'entourages d'ordre m contient une suite de type Ω

$$(3) \qquad V_{\gamma_\xi} = Q(t_1^\xi, G_1^\xi)\cdot Q(t_2^\xi, G_2^\xi)\cdot\ldots\cdot Q(t_m^\xi, G_m^\xi)$$

telle que

$$(4) \qquad Q(t_i^\eta, G_i^\eta)\cdot Q(t_i^\zeta, G_i^\zeta) \neq 0 \qquad \text{pour } \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant m \end{cases}$$

quels que soient les indices $\eta < \zeta < \Omega$.

Il s'agit de déduire (L_{k+1}) de (L_k). La suite donnée $\{V_\xi\}$ admet d'après (L_k) une suite partielle $\{V_{\alpha_\xi}\}$ de type Ω d'ensembles (3) satisfaisant à la condition (4). Considérons la suite

$$W_\xi = Q(t_{k+1}^\xi, G_{k+1}^\xi)\cdot\ldots\cdot Q(t_m^\xi, G_m^\xi).$$

D'après (L_1), elle admet une suite partielle de type Ω

$$(5) \qquad W_{\beta_\xi} = Q(u_{k+1}^\xi, H_{k+1}^\xi)\cdot\ldots\cdot Q(u_m^\xi, H_m^\xi)$$

telle que

$$(6) \qquad Q(u_{k+1}^\eta, H_{k+1}^\eta)\cdot Q(u_j^\zeta, H_j^\zeta) \neq 0 \qquad \text{pour } k+1 \leqslant j \leqslant m$$

quels que soient les indices $\eta < \zeta < \Omega$.

En posant alors $\gamma_\xi = \alpha_{\beta_\xi}$, on obtient la suite $\{V_{\gamma_\xi}\}$ satisfaisant à la thèse de (L_{k+1}). En effet, posons $u_j^\xi = t_j^{\beta_\xi}$ et $H_j^\xi = G_j^{\beta_\xi}$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Il résulte de (4) et de (6) que $Q(u_i^\eta, H_i^\eta)\cdot Q(u_j^\zeta, H_j^\zeta) \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k+1$ et $1 \leqslant j \leqslant m$, c. q. f. d.

Les théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3 montrent que, parmi (B), (D) et (K), plus une propriété est faible, plus elle est refractaire à la multiplication cartésienne transfinie. Néanmoins, quant à la propriété (S), j'ignore si elle est invariante par rapport à la multiplication cartésienne de deux espaces topologiques.

Il est à noter que le produit cartésien d'un espace jouissant de la propriété (S) et d'un autre jouissant de la propriété (K) possède la propriété (S). Cette remarque est due aux MM. Wischik et Lance (cf. ma note [5], p. 307).

3.4. Discontinu généralisé de Cantor, espace de Tychonoff, espaces généralisés de Baire et de Fréchet. Il résulte des théorèmes 3.1-3.3 et 1.2 (i) que :

(i) *Le discontinu généralisé de Cantor, ainsi que l'espace de Tychonoff et les espaces généralisés de Baire et de Fréchet possèdent la propriété* (B) *seulement dans le cas d'ordre au plus dénombrable, la propriété* (D) *seulement dans le cas d'ordre ne dépassant pas la puissance du continu et, enfin, ils possèdent toujours les propriétés* (K) *et* (S).

Voici une application de ce théorème. Comme on sait, chaque sous-ensemble fermé du discontinu de Cantor d'ordre dénombrable est son image continue. Or, cette proposition tombe en défaut dans le cas d'ordre indénombrable:

(ii) *Le discontinu généralisé de Cantor* C^T *d'ordre indénombrable contient un ensemble fermé* F *qui n'est pas une image continue de* C^T [25]).

En effet, en vertu de 3.1 (i), l'espace C^T contient un ensemble E isolé et indénombrable. Il résulte de 1.2 (viii) que E ne possède pas la propriété (S), et par conséquent, en vertu de 1.2 (ix), l'ensemble $F=\bar{E}$ ne possède pas non plus cette propriété. La propriété (S) étant invariante envers les transformations continues [1.2 (vi)] et l'espace C^T ayant cette propriété d'après (i), l'ensemble F ne peut être une image continue de C^T.

Travaux cités.

Alexandroff P. und Hopf H., [1] *Topologie*. Erster Band. Berlin 1935.

Čech E., [1] *On bicompact spaces*. Annals of Math. **38** (1937), 823-844.

Fréchet M., [1] *Les Espaces abstraits*. Collection Borel. Paris 1928.

Hausdorff F., [1] *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig 1914.

— [2] *Mengenlehre*. Berlin 1927.

Knaster B., [1] *Sur une propriété caractéristique de l'ensemble des nombres réels*. Rec. Math. Moscou **16** (**58**) (1945), p. 281—290.

Kuratowski C., [1] *Topologie I*. Monografie Matematyczne 3. Warszawa-Lwów 1933.

Marczewski (Szpilrajn) E., [1] *Sur certains invariants de l'opération* (A). Fund. Math. **21** (1933), 229-235.

— [2] *On the space of measurable sets*. Ann. Soc. Pol. Math. **17** (1938), 120-121.

— [3] *Ensembles indépendants et mesures non séparables*. C. R. Ac. Sc. Paris **207** (1938), 768-770.

[25]) Cf. ma note [4].

Marczewski (Szpilrajn) E., [4] *Remarque sur les produits cartésiens d'espaces topologiques*. C. R. Ac. Sc. URSS **31** (1941), 525-528.

— [5] *Sur deux propriétés de classes d'ensembles*. Fund. Math. **33** (1945), 303-307.

Sierpiński W., [1] *Leçons sur les nombres transfinis*. Collection Borel, Paris 1928.

— [2] *Sur un problème de la théorie des relations*. Annali R. Sc. Norm. Sup. Pisa (2) **2** (1933), 285-288.

— [3] *Sur un problème de la Théorie générale des ensembles*. Fund. Math. **33** (1945), 299-302.

Tychonoff A., [1] *Über die topologische Erweiterung von Räumen*. Math. Ann. **111** (1935), 762-766.

Urysohn P., [1] *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*. Math. Ann. **94** (1925), 262-295.