Démonstration. En effet, soit K_λ l'opérateur introduite dans la démonstration du théorème précédent. Puisque $\lim\limits_{\lambda\to\infty} K_\lambda x = x$, donc $\bigcup\limits_{\lambda>0}^{*} R(K_\lambda) = X$. D'autre part $R(K_\lambda) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} D(A_i)$, donc $\bigcap\limits_{i=1}^{n} D(A_i)$ est dense dans X.

Travaux cités

[1] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, part. I, New York 1958.

[2] A. Haimovici, *Sur une généralisation du problème de Cauchy*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, Sectio A, 17 (1963), p. 124-131.

[3] H. F. Trotter, *On the product of semi-groups of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1958), p. 545-552.

[4] K. Yosida, *Functional analysis*, Moscou 1967 (en russe).

Reçu par la Rédaction le 18. 3. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIII. (1969)

p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen

von

ARNE PERSSON (Lund) und ALBRECHT PIETSCH (Jena)

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir für jede Zahl p mit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ vier Typen von beschränkten linearen Abbildungen, die als p-nuklear, p-integral, quasi-p-nuklear und quasi-p-integral bezeichnet werden. Diese Abbildungsklassen haben den Charakter von Idealen und sind vollständig bezüglich einer in geeigneter Weise definierten Norm. Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Abbildungstypen werden durch das folgende Diagramm veranschaulicht:

$$\begin{array}{ccc} p\text{-nuklear} & \to & \text{quasi-}p\text{-nuklear} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ p\text{-integral} & \to & \text{quasi-}p\text{-integral.} \end{array}$$

Dabei deuten die waagerechten Pfeile stetige und die senkrechten Doppelpfeile isometrische Einbettungen an. Für zwei konjugierte Exponenten p and p' besteht außerdem zwischen den p-nuklearen und den quasi-p'-integralen bzw. zwischen den quasi-p-nuklearen und den p'-integralen Abbildungen eine gewisse Dualitätsrelation. Die einzelnen Abbildungsklassen wachsen in Abhängigkeit von p streng monoton, und es gelten interessante Multiplikationssätze. Als Anwendung der allgemeinen Theorie erhalten wir einen neuen Zugang zu einigen sehr interessanten Ergebnissen von A. Grothendieck [6] über Produkte von beschränkten linearen Abbildungen zwischen gewissen Typen von Banachräumen.

Für $p = 1$ geht die Definition der nuklearen und integralen Abbildungen auf R. Schatten [20] und A. Grothendieck [4] zurück. Die quasinuklearen und quasi-integralen Abbildungen wurden in [15] und [14] eingeführt. Die erste Verallgemeinerung auf den Fall $p > 1$ stammt von P. Saphar [19], der 2-nukleare Abbildungen betrachtete. Schließlich findet man in [16] eine vollständige Theorie der quasi-p-integralen Abbildungen, die dort allerdings unter einem anderen Gesichtspunkt untersucht werden.

A. Badrikian und S. Chevet haben sich kürzlich ebenfalls mit der Theorie der p-nuklearen Abbildungen beschäftigt (vgl. [2]).

Grundbegriffe und Bezeichnungen. Im folgendem sind E, F und G stets beliebige (reelle oder komplexe) Banachräume, deren abgeschlossene Einheitskugeln mit U, V und W bezeichnet werden. Dem entsprechend sind U^0, V^0 und W^0 die nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki schwach kompakten Einheitskugeln der zugehörigen dualen Banachräume E', F' und G'.

$C(A)$ ist der Banachraum aller stetigen Funktionen φ, die auf einem kompakten Hausdorffraum A definiert sind. Die beschränkten Linearformen $\mu \in C(A)'$ werden als *Maße* auf A bezeichnet, und es erweist sich häufig als anschaulicher, die durch den Rieszschen Darstellungssatz gerechtfertigte Integralschreibweise

$$\langle \varphi, \mu \rangle = \int_A \varphi(a)\, d\mu(a)$$

zu verwenden. Ein Maß μ heißt *positiv*, wenn für alle Funktionen $\varphi \in C(A)$ mit $\varphi(a) \geqslant 0$ stets $\langle \varphi, \mu \rangle \geqslant 0$ gilt. Für jedes positive Maß μ bezeichnen wir mit $L_p(A, \mu)$ die in bekannter Weise definierten Funktionenräume. Für die klassischen Folgenräume benutzen wir ebenfalls die üblichen Symbole l_p und c_0. Jedem Exponenten p mit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ entspricht der durch die Gleichung

$$1/p + 1/p' = 1$$

bestimmte konjugierte Exponent p'. $B(M)$ ist der Banachraum aller beschränkten Funktionen, die auf einer beliebigen Menge M definiert sind.

Die Gesamtheit $\boldsymbol{L}(E, F)$ aller beschränkten linearen Abbildungen T von E in F ist ein Banachraum mit der Norm

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|.$$

Eine Abbildung $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ wird als *ausgeartet* bezeichnet, wenn sie einen endlichdimensionalen Bildraum besitzt. Man nennt eine Abbildung $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ *kompakt* bzw. *schwach kompakt*, wenn sie die Einheitskugel U in eine relativ kompakte bzw. relativ schwach kompakte Menge $T(U)$ überführt. Schließlich heißt eine Abbildung $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ *vollstetig* (im Sinne von D. Hilbert), wenn sie jede schwach konvergente Folge $\{x_n\}$ in eine konvergente Folge $\{Tx_n\}$ abbildet. Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen.

$\boldsymbol{L}_0(E, F)$: Gesamtheit der ausgearteten Abbildungen von E in F.
$\boldsymbol{K}(E, F)$: Gesamtheit der kompakten Abbildungen von E in F.
$\boldsymbol{W}(E, F)$: Gesamtheit der schwach kompakten Abbildungen von E in F.
$\boldsymbol{V}(E, F)$: Gesamtheit der vollstetigen Abbildungen von E in F.

Ein Banachraum E besitzt die *Approximationseigenschaft* (vgl. [4] oder [22]), wenn es zu jeder kompakten Teilmenge K von E eine ausgeartete Abbildung $T \in \boldsymbol{L}_0(E, E)$ gibt, so daß

$$\|x - Tx\| \leqslant 1 \quad \text{für } x \in K$$

gilt. Läßt sich dabei stets die zusätzliche Bedingung $\|T\| \leqslant 1$ erfüllen, so spricht man von der *metrischen* Approximationseigenschaft. Da bis jetzt noch kein Gegenbeispiel bekannt ist, wird vielfach vermutet, daß alle Banachräume die metrische Approximationseigenschaft haben.

Ein Banachraum F besitzt die *Fortsetzungseigenschaft*, wenn jede Abbildung $T_0 \in \boldsymbol{L}(E_0, F)$, die auf einem linearen Teilraum E_0 eines beliebigen Banachraumes E definiert ist, unter Beibehaltung ihrer Norm zu einer Abbildung $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ fortgesetzt werden kann. Die Banachräume $L_\infty(A, \mu)$ und $B(M)$ haben die Fortsetzungseigenschaft (vgl. [10]).

1. p-nukleare Abbildungen. Eine lineare Abbildung T von einem Banachraum E in einen Banachraum F heißt *p-nuklear*, wenn sie in der Form

$$Tx = \sum \langle x, a_i \rangle y_i$$

dargestellt werden kann, so daß für die beschränkten Linearformen $a_i \in E'$ und die Elemente $y_i \in F$ die Ungleichungen

$$\Big\{\sum \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} < +\infty$$

und

$$\sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{\sum |\langle y_i, b \rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'} < +\infty$$

bestehen ($1 \leqslant p < +\infty$). Im Fall $p = 1$ ergeben sich die nuklearen Abbildungen von R. Schatten und A. Grothendieck. Aus der für jede endliche Menge $\mathfrak{i}$ von natürlichen Zahlen gültigen Abschätzung

$$\Big\|\sum_{\mathfrak{i}} \langle x, a_i \rangle y_i\Big\| = \sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big|\sum_{\mathfrak{i}} \langle x, a_i \rangle \langle y_i, b \rangle\Big| \leqslant \|x\| \Big\{\sum_{\mathfrak{i}} \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} \sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{\sum_{1}^{\infty} |\langle y_i, b \rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'}$$

olgt, daß die unendliche Reihe

$$\sum \langle x, a_i \rangle y_i$$

unbedingt konvergent ist.

Setzt man

$$\nu_p(T) = \inf \Big[\Big\{\sum \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} \sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{\sum |\langle y_i, b \rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'}\Big],$$

wobei das Infimum über alle möglichen Darstellungen der Abbildung T gebildet wird, so ergibt sich aus der obigen Abschätzung

SATZ 1. *Jede p-nukleare Abbildung T ist beschränkt, und es gilt*

$$\|T\| \leqslant \nu_p(T).$$

SATZ 2. *Die Gesamtheit $N_p(E, F)$ aller p-nuklearen Abbildungen von E in F ist ein Banachraum mit der Norm ν_p.*

Die Behauptung des vorangehenden Satzes ergibt sich unmittelbar (1) aus dem

LEMMA 1. *Für jede Folge von p-nuklearen Abbildungen $T_n \in N_p(E, F)$ mit $\sum \nu_p(T_n) < +\infty$ wird durch den Ansatz $Tx = \sum T_n x$ eine p-nukleare Abbildung T definiert, und es gilt*

$$\nu_p(T) \leqslant \sum \nu_p(T_n).$$

Beweis. (Im Fall $p = 1$ muß der Beweis geringfügig modifiziert werden.) Wir stellen die p-nuklearen Abbildungen T_n in der Form

$$T_n x = \sum_i \langle x, a_{ni}\rangle y_{ni}$$

dar, so daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichungen

$$\sum_i \|a_{ni}\|^p \leqslant \nu_p(T_n) + \varepsilon/2^n$$

und

$$\sup_{\|b\| \leqslant 1} \sum_i |\langle y_{ni}, b\rangle|^{p'} \leqslant \nu_p(T_n) + \varepsilon/2^n$$

gelten. Dann folgt aus den Abschätzungen

$$\sum_n \sum_i \|a_{ni}\|^p \leqslant \sum \nu_p(T_n) + \varepsilon$$

und

$$\sup_{\|b\| \leqslant 1} \sum_n \sum_i |\langle y_{ni}, b\rangle|^{p'} \leqslant \sum \nu_p(T_n) + \varepsilon,$$

daß die unendliche Reihe $\sum T_n x$ konvergiert, und wir erhalten durch den Ansatz $Tx = \sum T_n x$ eine Abbildung T, die in der Form

$$Tx = \sum_n \sum_i \langle x, a_{ni}\rangle y_{ni}$$

(1) Ein linear Raum E, der stetig in einen topologischen linearen Raum L eingebettet werden kann, ist dann und nur dann vollständig, wenn für jede Folge $\{x_n\} \in E$ mit $\sum \|x_n\| < +\infty$ in L ein Grenzwert $s = \sum x_n$ mit $\|s\| \leqslant \sum \|x_n\|$ existiert.

dargestellt werden kann. Abschließend ergibt sich aus den obigen Abschätzungen, daß T eine p-nukleare Abbildung mit $\nu_p(T) \leqslant \sum \nu_p(T_n) + \varepsilon$ ist.

Ohne Beweis formulieren wir den einfachen

SATZ 3. *Aus $T \in N_p(E, F)$ und $S \in L(F, G)$ folgt $ST \in N_p(E, G)$, und es gilt $\nu_p(ST) \leqslant \|S\| \nu_p(T)$.*

Aus $T \in L(E, F)$ und $S \in N_p(F, G)$ folgt $ST \in N_p(E, G)$, und es gilt $\nu_p(ST) \leqslant \nu_p(S) \|T\|$.

Wir zeigen nun, daß die Banachräume $N_p(E, F)$ in Abhängigkeit von p monoton wachsen.

SATZ 4. *Für zwei Zahlen p und q mit $1 \leqslant p < q < +\infty$ gilt stets $N_p(E, F) \subset N_q(E, F)$ und $\nu_p \geqslant \nu_q$.*

Beweis. Wir betrachten eine Abbildung $T \in N_p(E, F)$ und stellen sie in der Form $Tx = \sum \langle x, a_i\rangle y_i$ dar, so daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichungen

$$\Big\{\sum \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant 1 \quad \text{und} \quad \sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{\sum |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'} \leqslant \nu_p(T) + \varepsilon$$

gelten. Anschließend bestimmen wir die positive Zahl r aus der Gleichung $1/p = 1/r + 1/q$ und setzen

$$\hat{a}_i = \|a_i\|^{-p/r} a_i \quad \text{und} \quad \hat{y}_i = \|a_i\|^{p/r} y_i.$$

Dann gilt die Beziehung

$$\Big\{\sum \|\hat{a}_i\|^q\Big\}^{1/q} \leqslant 1,$$

und wegen der Identität $1/q' = 1/r + 1/p'$ ergibt sich unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung die Abschätzung

$$\sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{\sum |\langle \hat{y}_i, b\rangle|^{q'}\Big\}^{1/q'} \leqslant \Big\{\sum \|a_i\|^p\Big\}^{1/r} \sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{\sum |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'} \leqslant \nu_p(T) + \varepsilon.$$

Abschließend folgt aus der Darstellung $Tx = \sum \langle x, \hat{a}_i\rangle \hat{y}_i$, daß T eine q-nukleare Abbildung mit $\nu_q(T) \leqslant \nu_p(T) + \varepsilon$ ist.

SATZ 5. *Die ausgearteten Abbildungen von E in F bilden einen dichten linearen Teilraum des Banachraumes $N_p(E, F)$.*

Beweis. Als erstes stellen wir fest, daß alle ausgearteten Abbildungen p-nuklear sind, weil sie sich in der Form $Tx = \sum_1^n \langle x, a_i\rangle y_i$ schreiben lassen.

Ist andererseits T eine beliebige p-nukleare Abbildung, dann kann sie in der Form $Tx = \sum \langle x, a_i\rangle y_i$ dargestellt werden, so daß die Ungleichungen

$$\Big\{\sum \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} < +\infty \quad \text{und} \quad \sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{\sum |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'} < +\infty$$

bestehen. Da für die ausgearteten Abbildungen

$$T_n x = \sum_1^n \langle x, a_i \rangle y_i$$

die Abschätzungen

$$\nu_p(T - T_n) \leqslant \Big\{\sum_{n+1}^{\infty} \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} \sup_{\|b\|\leqslant 1} \Big\{\sum |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'}$$

gelten, hat man

$$\lim \nu_p(T - T_n) = 0.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Als unmittelbare Folgerung aus dem vorangehenden Satz und der Ungleichung $\|T\| \leqslant \nu_p(T)$ ergibt sich

Satz 6. *Jede p-nukleare Abbildung T ist kompakt.*

Wir geben nun ein einfaches Beispiel einer p-nuklearen Abbildung an.

Satz 7. *Für jede Folge $\{\delta_i\} \epsilon l_p$ wird durch die Zuordnung*

$$\{\xi_i\} \xrightarrow{D} \{\delta_i \xi_i\}$$

eine p-nukleare Abbildung D von l_∞ in l_p definiert, und es gilt

$$\nu_p(D) = \Big\{\sum |\delta_i|^p\Big\}^{1/p}.$$

Beweis. Im l_p besteht für die Einheitsfolgen e_i die Identität

$$\sup_{\|b\|\leqslant 1} \Big\{\sum |\langle e_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'} = 1.$$

Andererseits gilt für die durch den Ansatz $\langle x, a_i \rangle = \delta_i \xi_i$ mit $x = \{\xi_i\}$ auf l_∞ erklärten Linearformen a_i die Beziehung

$$\Big\{\sum \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} = \Big\{\sum |\delta_i|^p\Big\}^{1/p}.$$

Deshalb folgt aus der Darstellung $Dx = \sum \langle x, a_i \rangle e_i$, daß D eine p-nukleare Abbildung mit $\nu_p(D) \leqslant \{\sum |\delta_i|^p\}^{1/p}$ ist.

Abschließend ergibt sich mit der Folge $e = \{1, 1, \ldots\}$ die Abschätzung

$$\Big\{\sum |\delta_i|^p\Big\}^{1/p} = \|De\| \leqslant \|D\| \leqslant \nu_p(D) \leqslant \Big\{\sum |\delta_i|^p\Big\}^{1/p}.$$

Im folgenden zeigen wir, daß die in Satz 7 betrachtete Diagonaltransformation D als der Prototyp der p-nuklearen Abbildungen angesehen werden kann. Es gilt nämlich

Satz 8. *Eine Abbildung $T \epsilon \mathbf{L}(E, F)$ ist dann und nur dann p-nuklear, wenn sie sich auf die folgende Art faktorisieren läßt:*

$$E \xrightarrow{P} l_\infty \xrightarrow{D} l_p \xrightarrow{Q} F.$$

Dabei sind P und Q beschränkte lineare Abbildungen mit $\|P\| \leqslant 1$ und $\|Q\| \leqslant 1$, während die Abbildung D durch eine Zuordnung der Form

$$\{\xi_i\} \xrightarrow{D} \{\delta_i \xi_i\} \quad \text{mit} \quad \{\delta_i\} \epsilon l_p$$

definiert wird. Zusätzlich kann erreicht werden, daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\nu_p(D) = \Big\{\sum |\delta_i|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \nu_p(T) + \varepsilon$$

gilt.

Beweis. Aus Satz 3 und Satz 7 folgt, daß jede auf die angegebene Art faktorisierbare Abbildung p-nuklear ist. Wir haben deshalb nur noch zu zeigen, daß sich für jede p-nukleare Abbildung T die gesuchte Zerlegung konstruieren läßt. Zu diesem Zweck betrachten wir eine Darstellung $Tx = \sum \langle x, a_i \rangle y_i$, so daß die Beziehungen

$$\Big\{\sum \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \nu_p(T) + \varepsilon \quad \text{und} \quad \sup_{\|b\|\leqslant 1} \Big\{\sum |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'} \leqslant 1$$

gelten. Dann werden die gesuchten Abbildungen durch die Ansätze

$$Px = \{\langle x, a_i/\|a_i\|\rangle\}, \qquad \delta_i = \|a_i\| \quad \text{und} \quad Q\{\eta_i\} = \sum \eta_i y_i$$

geliefert.

2. p-majorisierbare vektorwertige Maße. Ist $C(A)$ der Banachraum aller stetigen Funktionen, die auf einem kompakten Hausdorffraum A definiert sind, so werden die beschränkten linearen Abbildungen von $C(A)$ in einem beliebigen Banachraum F als *F-wertige Maße auf A* bezeichnet, und es erweist sich manchmal als anschaulicher, diese Abbildungen in der Integralform

$$M(\varphi) = \int_A \varphi(a)\, dM(a)$$

zu schreiben.

Ein F-wertiges Maß M heißt *p-majorisierbar* (für den Fall $p = 1$ findet man die auf J. Dieudonné und N. Dinculeanu zurückgehende Definition in [1]), wenn es auf A ein positives Maß μ gibt, so daß die Beziehung

$$\|M(\varphi)\| \leqslant \Big\{\int_A |\varphi(a)|^p\, d\mu(a)\Big\}^{1/p}$$

besteht. Setzt man

$$\mu_p(M) = \inf \mu(A)^{1/p},$$

wobei das Infimum über alle p-majorisierenden Maße μ gebildet wird, so ergibt sich

Satz 9. *Die Gesamtheit $\mathbf{M}_p(A, F)$ aller auf A definierten p-majorisierbaren F-wertigen Maße ist ein Banachraum mit der Norm μ_p.*

Die Behauptung dieses Satzes folgt unmittelbar aus

Lemma 2. *Für jede Folge von p-majorisierbaren F-wertigen Maßen $M_n \in \boldsymbol{M}_p(A, F)$ mit $\sum \boldsymbol{\mu}_p(M_n) < +\infty$ erhält man durch den Ansatz $M(\varphi) = \sum M_n(\varphi)$ ein p-majorisierbares F-wertiges Maß M, und es gilt*

$$\boldsymbol{\mu}_p(M) \leqslant \sum \boldsymbol{\mu}_p(M_n).$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es auf A zu jeder vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Folge von positiven Maßen μ_n mit

$$\|M_n(\varphi)\| \leqslant \Big\{\int\limits_A |\varphi(a)|^p d\mu_n(a)\Big\}^{1/p} \quad \text{und} \quad \mu_n(A)^{1/p} \leqslant \boldsymbol{\mu}_p(M_n) + \varepsilon/2^n.$$

Da für die unnormierten Maße $\mu_n^* = \{\boldsymbol{\mu}_p(M_n) + \varepsilon/2^n\}^{1-p}\mu_n$ die Aussagen $\mu_n^*(A) \leqslant \boldsymbol{\mu}_p(M_n) + \varepsilon/2^n$ gelten, kann man durch den Ansatz $\mu^* = \sum \mu_n^*$ ein positives Maß μ^* mit

$$\mu^*(A) \leqslant \sum \boldsymbol{\mu}_p(M_n) + \varepsilon$$

definieren. Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung ergibt sich dann die Abschätzung

$$\|M(\varphi)\| \leqslant \sum \|M_n(\varphi)\| \leqslant \sum \{\boldsymbol{\mu}_p(M_n) + \varepsilon/2^n\}^{1/p'} \Big\{\int\limits_A |\varphi(a)|^p d\mu_n^*(a)\Big\}^{1/p}$$

$$\leqslant \Big\{\sum \boldsymbol{\mu}_p(M_n) + \varepsilon\Big\}^{1/p'} \Big\{\int\limits_A |\varphi(a)|^p d\mu^*(a)\Big\}^{1/p}.$$

Deshalb ist das F-wertige Maß M ebenfalls p-majorisierbar, und es gilt die Beziehung

$$\boldsymbol{\mu}_p(M) \leqslant \sum \boldsymbol{\mu}_p(M_n) + \varepsilon,$$

die durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ in die verallgemeinerte Dreiecksungleichung übergeht.

Satz 10. *Für zwei Zahlen p und q mit $1 \leqslant p < q < +\infty$ gilt stets $\boldsymbol{M}_p(A, F) \subset \boldsymbol{M}_q(A, F)$ und $\boldsymbol{\mu}_p \geqslant \boldsymbol{\mu}_q$.*

Beweis. Wir betrachten ein beliebiges p-majorisierbares F-wertiges Maß M. Dann gibt es zu jeder vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ ein positives Maß μ mit

$$\|M(\varphi)\| \leqslant \Big\{\int\limits_A |\varphi(a)|^p d\mu(a)\Big\}^{1/p} \quad \text{und} \quad \mu(A)^{1/p} \leqslant \boldsymbol{\mu}_p(M) + \varepsilon.$$

Wird die Zahl r aus der Gleichung $1/p = 1/r + 1/q$ bestimmt, so ergibt sich die Abschätzung

$$\|M(\varphi)\| \leqslant \Big\{\int\limits_A 1^r d\mu(a)\Big\}^{1/r} \cdot \Big\{\int\limits_A |\varphi(a)|^q d\mu(a)\Big\}^{1/q}.$$

Deshalb ist das F-wertige Maß M auch q-majorisierbar, und es gilt

$$\boldsymbol{\mu}_q(M) \leqslant \mu(A)^{1/r}\mu(A)^{1/q} \leqslant \boldsymbol{\mu}_p(M) + \varepsilon.$$

3. p-integrale Abbildungen. Eine lineare Abbildung T von einem Banachraum E in einen Banachraum F heißt *p-integral*, wenn sie mit einem auf der schwach kompakten Einheitskugel U^0 des dualen Banachraumes E' definierten p-majorisierbaren F-wertigen Maß M in der Form

$$Tx = \int\limits_{U^0} \langle x, a\rangle dM(a)$$

dargestellt werden kann. (Nach der Grothendieckschen Definition der 1-integralen Abbildungen darf das 1-majorisierbare Maß M Werte in F'' annehmen). Setzt man

$$\boldsymbol{\iota}_p(T) = \inf \boldsymbol{\mu}_p(M),$$

wobei das Infimum über alle in den Darstellungen von T auftretenden p-majorisierbaren F-wertigen Maße M gebildet wird, so ergibt sich

Satz 11. *Jede p-integrale Abbildung T ist beschränkt, und es gilt $\|T\| \leqslant \boldsymbol{\iota}_p(T)$.*

Satz 12. *Die Gesamtheit $\boldsymbol{I}_p(E, F)$ aller p-integralen Abbildungen von E in F ist ein Banachraum mit der Norm $\boldsymbol{\iota}_p$.*

Die Behauptung des vorangehenden Satzes folgt unmittelbar aus

Lemma 3. *Für jede Folge von p-integralen Abbildungen $T_n \in \boldsymbol{I}_p(E, F)$ mit $\sum \boldsymbol{\iota}_p(T_n) < +\infty$ wird durch den Ansatz $Tx = \sum T_n x$ eine p-integrale Abbildung T definiert, und es gilt*

$$\boldsymbol{\iota}_p(T) \leqslant \sum \boldsymbol{\iota}_p(T_n).$$

Beweis. Wir stellen die p-integralen Abbildungen T_n in der Form

$$T_n x = \int\limits_{U^0} \langle x, a\rangle dM_n(a)$$

dar, so daß die Ungleichungen $\boldsymbol{\mu}_p(M_n) \leqslant \boldsymbol{\iota}_p(T_n) + \varepsilon/2^n$ gelten. Dann ergibt sich die Abschätzung $\sum \boldsymbol{\mu}_p(M_n) \leqslant \sum \boldsymbol{\iota}_p(T_n) + \varepsilon$, und nach Lemma 2 wird durch den Ansatz $M(\varphi) = \sum M_n(\varphi)$ ein p-majorisierbares F-wertiges Maß M mit $\boldsymbol{\mu}_p(M) \leqslant \sum \boldsymbol{\mu}_p(M_n) \leqslant \sum \boldsymbol{\iota}_p(T_n) + \varepsilon$ definiert. Abschließend folgt aus der Identität

$$Tx = \int\limits_{U^0} \langle x, a\rangle dM(a),$$

daß T eine p-integrale Abbildung mit $\boldsymbol{\iota}_p(T) \leqslant \boldsymbol{\mu}_p(M) \leqslant \sum \boldsymbol{\iota}_p(T_n) + \varepsilon$ ist.

Satz 13. *Aus $T \in \boldsymbol{I}_p(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{L}(F, G)$ folgt $ST \in \boldsymbol{I}_p(E, G)$, und es gilt $\boldsymbol{\iota}_p(ST) \leqslant \|S\|\boldsymbol{\iota}_p(T)$.*

Aus $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{I}_p(F, G)$ folgt $ST \in \boldsymbol{I}_p(E, G)$, und es gilt $\iota_p(ST) \leqslant \iota_p(S)\|T\|$.

Beweis. Im ersten Fall stellen wir die Abbildung $T \in \boldsymbol{I}_p(E, F)$ in der Form

$$Tx = \int_{U^0} \langle x, a\rangle dM(a)$$

dar, so daß die Ungleichung $\mu_p(M) \leqslant \iota_p(T)+\varepsilon$ besteht. Wird anschliessend das G-wertige Maß N durch den Ansatz $N = SM$ definiert, so gelten die Aussagen

$$STx = \int_{U^0} \langle x, a\rangle dN(a) \quad \text{und} \quad \mu_p(N) \leqslant \|S\| \mu_p(M).$$

Folglich ist ST eine p-integrale Abbildung mit

$$\iota_p(ST) \leqslant \|S\| [\iota_p(T)+\varepsilon].$$

Im zweiten Fall stellen wir die Abbildung $S \in \boldsymbol{I}_p(F, G)$ in der Form

$$Sy = \int_{V^0} \langle y, b\rangle dN(b)$$

dar, so daß die Ungleichung $\mu_p(N) \leqslant \iota_p(S)+\varepsilon$ besteht. Dann gibt es auf V^0 ein positives Maß ν mit

$$\|N(\varphi)\| \leqslant \Big\{\int_{V^0} |\varphi(b)|^p d\nu(b)\Big\}^{1/p} \quad \text{und} \quad \nu(V^0)^{1/p} \leqslant \mu_p(N)+\varepsilon,$$

und aus der Ungleichung

$$\Big\|\int_{V^0} \varphi(T'b/\|T\|) dN(b)\Big\| \leqslant \Big\{\int_{V^0} |\varphi(T'b/\|T\|)|^p d\nu(b)\Big\}^{1/p}$$

folgt, daß durch den Ansatz

$$\int_{U^0} \varphi(a) dM(a) = \|T\| \int_{V^0} \varphi(T'b/\|T\|) dN(b)$$

auf U^0 ein p-majorisierbares G-wertiges Maß mit

$$\mu_p(M) \leqslant \|T\| \nu(V^0)^{1/p}$$

definiert wird. Deshalb ergibt sich aus der Identität

$$STx = \int_{V^0} \langle Tx, b\rangle dN(b) = \int_{U^0} \langle x, a\rangle dM(a),$$

daß das Produkt ST eine p-integrale Abbildung mit

$$\iota_p(ST) \leqslant [\iota_p(S)+2\varepsilon]\|T\|$$

ist.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 10 erhält man

Satz 14. *Für zwei Zahlen p und q mit $1 \leqslant p < q < +\infty$ gilt stets $\boldsymbol{I}_p(E, F) \subset \boldsymbol{I}_q(E, F)$ und $\iota_p \geqslant \iota_q$.*

Im folgenden ist μ stets ein positives Maß auf einem kompakten Hausdorffraum A.

Satz 15. *Die identische Abbildung I von $C(A)$ in $L_p(A, \mu)$ ist p-integral, und es gilt $\iota_p(I) = \mu(A)^{1/p}$.*

Beweis. Da jedem Element $a \in A$ das Punktmaß δ_a entspricht, läßt sich A in die schwach kompakte Einheitskugel U^0 des dualen Banachraumes $C(A)'$ einbetten, und man kann jeder Funktion $\psi \in C(U^0)$ eine Funktion $\psi_A \in C(A)$ zuordnen, die durch die Gleichung $\psi_A(a) = \psi(\delta_a)$ definiert wird. Dann liefert der Ansatz $\langle \psi, \hat{\mu}\rangle = \langle \psi_A, \mu\rangle$ auf U^0 ein positives Maß μ mit $\hat{\mu}(U^0) = \mu(A)$. Wird die Zuordnung $\psi \to \psi_A$ als Abbildung von $C(U^0)$ in $L_p(A, \mu)$ betrachtet, so erhält man ein p-majorisierbares $L_p(A, \mu)$-wertiges Maß M mit $\mu_p(M) \leqslant \mu(A)^{1/p}$, denn es besteht die Beziehung

$$\|\psi_A\|_{L_p} = \Big\{\int_A |\psi_A(a)|^p d\mu(a)\Big\}^{1/p} = \Big\{\int_{U^0} |\psi(\lambda)|^p d\hat{\mu}(\lambda)\Big\}^{1/p}.$$

Nun folgt aus der Identität $\varphi = \langle \varphi, \cdot\rangle_A$, daß die identische Abbildung von $C(A)$ in $L_p(A, \mu)$ wie behauptet p-integral ist. Außerdem gilt die Aussage

$$\mu(A)^{1/p} \leqslant \|I\| \leqslant \iota_p(I) \leqslant \mu_p(M) \leqslant \mu(A)^{1/p}.$$

Wir zeigen nun, daß die identischen Abbildungen von $C(A)$ in $L_p(A, \mu)$ als Prototyp der p-integralen Abbildungen angesehen werden können.

Satz 16. *Eine Abbildung $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ ist dann und nur dann p-integral, wenn sie sich auf die folgende Art faktorisieren läßt:*

$$E \xrightarrow{P} C(A) \xrightarrow{I} L_p(A, \mu) \xrightarrow{Q} F.$$

Dabei sind P und Q beschränkte lineare Abbildungen mit $\|P\| \leqslant 1$ und $\|Q\| \leqslant 1$. Zusätzlich kann erreicht werden, daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\iota_p(I) = \mu(A)^{1/p} \leqslant \iota_p(T)+\varepsilon$$

gilt.

Beweis. Aus Satz 13 und Satz 15 folgt, daß jede auf die angegebene Art faktorisierbare Abbildung p-integral ist. Wir haben deshalb nur noch zu zeigen, daß sich für jede p-integrale Abbildung T die gesuchte

Zerlegung konstruieren läßt. Zu diesem Zweck betrachten wir eine Darstellung

$$Tx = \int\limits_{U^0} \langle x, a\rangle dM(a),$$

so daß die Ungleichung $\mu_p(M) \leqslant \iota_p(T)+\varepsilon/2$ besteht. Dann gibt es auf U^0 ein positives Maß μ mit

$$\|M(\varphi)\| \leqslant \Big\{\int\limits_{U^0} |\varphi(a)|^p d\mu(a)\Big\}^{1/p} \quad \text{und} \quad \mu(U^0)^{1/p} \leqslant \mu_p(M)+\varepsilon/2.$$

Deshalb läßt sich das F-wertige Maß M auf eindeutige Weise zu einer beschränkten linearen Abbildung Q von $L_p(U^0, \mu)$ in F fortsetzen. Dabei gilt die Aussage $\|Q\| \leqslant 1$. Wird schließlich die Abbildung P durch die Zuordnung $x \to \langle x, \cdot\rangle$ definiert, so besteht die gesuchte Identität $T = QIP$.

In dem soeben bewiesenen Faktorisierungssatz kann man den Banachraum $C(A)$ durch den Banachraum $L_\infty(A, \mu)$ ersetzen. Diese Modifizierung ist bei vielen Betrachtungen nützlich, weil $L_\infty(A, \mu)$ die Fortsetzungseigenschaft besitzt.

Satz 17. *Die identische Abbildung I von $L_\infty(A, \mu)$ in $L_p(A, \mu)$ ist p-integral, und es gilt $\iota_p(I) = \mu(A)^{1/p}$.*

Beweis. Nach den Darstellungssätzen (vgl. [8] oder [11]) von I. M. Gelfand oder S. Kakutani gibt es einen kompakten Hausdorffraum A', so daß sich der Banachraum $L_\infty(A, \mu)$ durch einen Isomorphismus K auf den Banachraum $C(A')$ abbilden läßt. Dabei geht das Maß μ in das Maß μ' über, und K kann auf eindeutige Weise zu einem Isomorphismus zwischen $L_p(A, \mu)$ und $L_p(A', \mu')$ fortgesetzt werden. Nun folgt unsere Behauptung unmittelbar aus Satz 15 und dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L_\infty(A, \mu) & \longrightarrow & L_p(A, \mu) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ C(A') & \longrightarrow & L_p(A', \mu'). \end{array}$$

Als unmittelbare Folgerung aus den Sätzen 16 und 17 ergibt sich nun der bereits angekündigte

Satz 18. *Eine Abbildung $T \in \mathbf{L}(E, F)$ ist dann und nur dann p-integral, wenn sie sich auf die folgende Art faktorisieren läßt:*

$$E \xrightarrow{P} L_\infty(A, \mu) \xrightarrow{I} L_p(A, \mu) \xrightarrow{Q} F.$$

Dabei sind P und Q beschränkte lineare Abbildungen mit $\|P\| \leqslant 1$ und $\|Q\| \leqslant 1$. Zusätzlich kann erreicht werden, daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\iota_p(I) = \mu(A)^{1/p} \leqslant \iota_p(T)+\varepsilon$$

gilt.

Als unmittelbare Folgerung aus dem Faktorisierungssatz für p-integrale Abbildungen ergibt sich

Satz 19. *Jede p-integrale Abbildung T ist schwach kompakt.*

Eine ähnliche Aussage enthält

Satz 20. *Jede p-integrale Abbildung T ist vollstetig.*

(Man kann sogar beweisen, daß alle schwachen Cauchy-Folgen in konvergente Folgen abgebildet werden.)

Beweis. In dem Spezialfall der identischen Abbildung von $C(A)$ in $L_p(A, \mu)$ ergibt sich unsere Behauptung aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz und der Tatsache, daß alle schwach konvergenten Folgen beschränkt sind. Auf Grund des Faktorisierungssatzes ist damit auch der allgemeine Fall bewiesen.

4. Quasi-p-nukleare Abbildungen. Eine lineare Abbildung T von einen Banachraum E in einen Banachraum F heißt *quasi-p-nuklear*, wenn es eine Folge von Linearformen $a_i \in E'$ mit $\sum \|a_i\|^p < +\infty$ gibt, so daß die Ungleichung $\|Tx\| \leqslant \{\sum |\langle x, a_i\rangle|^p\}^{1/p}$ besteht. Setzt man

$$\nu_p^Q(T) = \inf\Big\{\sum \|a_i\|^p\Big\}^{1/p},$$

wobei das Infimum über alle zulässigen Folgen $\{a_i\}$ gebildet wird, so ergibt sich

Satz 21. *Jede quasi-p-nukleare Abbildung T ist beschränkt, und es gilt*

$$\|T\| \leqslant \nu_p^Q(T).$$

Satz 22. *Die Gesamtheit $\mathbf{N}_p^Q(E, F)$ aller quasi-p-nuklearen Abbildungen von E in F ist ein Banachraum mit der Norm ν_p^Q.*

Die Behauptung des vorangehenden Satzes folgt unmittelbar aus

Lemma 4. *Für jede Folge von quasi-p-nuklearen Abbildungen $T_n \in \mathbf{N}_p^Q(E, F)$ mit $\sum \nu_p^Q(T_n) < +\infty$ wird durch den Ansatz $Tx = \sum T_n x$ eine quasi-p-nukleare Abbildung T definiert, und es gilt*

$$\nu_p^Q(T) \leqslant \sum \nu_p^Q(T_n).$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jeder vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ Linearformen $a_{ni} \in E'$ mit

$$\Big\{\sum_i \|a_{ni}\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \nu_p^Q(T_n)+\varepsilon/2^n \quad \text{und} \quad \|T_n x\| \leqslant \Big\{\sum_i |\langle x, a_{ni}\rangle|^p\Big\}^{1/p}.$$

Dann bestehen mit den Linearformen $a_{ni}^* = \{\nu_p^Q(T_n)+\varepsilon/2^n\}^{-1/p'} a_{ni}$ die Ungleichungen

$$\sum_n \sum_i \|a_{ni}^*\|^p \leqslant \sum \nu_p^Q(T_n)+\varepsilon$$

und

$$\|Tx\| \leqslant \sum \|T_n x\| \leqslant \sum_n \{\nu_p^Q(T_n) + \varepsilon/2^n\}^{1/p'} \Big\{\sum_i |\langle x, a_{ni}^*\rangle|^p\Big\}^{1/p}$$

$$\leqslant \Big\{\sum_n \nu_p^Q(T_n) + \varepsilon\Big\}^{1/p'} \Big\{\sum_n \sum_i |\langle x, a_{ni}^*\rangle|^p\Big\}^{1/p}.$$

Folglich ist T eine quasi-p-nukleare Abbildung mit

$$\nu_p^Q(T) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu_p^Q(T_n) + \varepsilon.$$

Ohne Beweis formulieren wir den einfachen

Satz 23. *Aus $T \in \boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{L}(F, G)$ folgt $ST \in \boldsymbol{N}_p^Q(E, G)$, und es gilt $\nu_p^Q(ST) \leqslant \|S\| \nu_p^Q(T)$.*

Aus $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{N}_p^Q(F, G)$ folgt $ST \in \boldsymbol{N}_p^Q(E, G)$, und es gilt $\nu_p^Q(ST) \leqslant \nu_p^Q(S)\|T\|$.

Außerdem hat man

Satz 24. *Für zwei Zahlen p und q mit $1 \leqslant p < q < +\infty$ gilt stets $\boldsymbol{N}_p^Q(E, F) \subset \boldsymbol{N}_q^Q(E, F)$ und $\nu_p^Q \geqslant \nu_q^Q$.*

Lemma 5. *Jede quasi-p-nukleare Abbildung $T \in \boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$ läßt sich mit Abbildungen $P \in \boldsymbol{K}(E, E_0)$, $T_0 \in \boldsymbol{N}_p^Q(E_0, F_0)$ und $Q \in \boldsymbol{K}(F_0, F)$ als Produkt $T = QT_0P$ schreiben. Dabei sind E_0 und F_0 geeignete Banachräume.*

Beweis. Wir betrachten eine Folge von Linearformen $a_i \in E'$ mit $\|Tx\| \leqslant \{\sum |\langle x, a_i\rangle|^p\}^{1/p}$ und $\sum \|a_i\|^p < +\infty$. Dann wird durch den Ansatz

$$D\{\xi_i\} = \{\delta_i \xi_i\} \quad \text{mit} \quad \delta_i = \|a_i\|$$

eine Abbildung $D \in \boldsymbol{N}_p^Q(l_\infty, l_p)$ definiert. Von dieser Abbildung lassen sich zwei kompakte Abbildungen abspalten, ohne daß die Quasi-p-Nuklearität verloren geht. Zu diesem Zweck bestimmen wir eine Nullfolge von positiven Zahlen λ_i mit

$$\sum \lambda_i^{-2p} \delta_i^p < +\infty.$$

Dann erhält man durch die Ansätze

$$K_\infty\{\xi_i\} = \{\lambda_i \xi_i\}, \quad D_0\{\xi_i\} = \{\lambda_i^{-2} \delta_i \xi_i\} \quad \text{und} \quad K_p\{\xi_i\} = \{\lambda_i \xi_i\}$$

drei Abbildungen $K_\infty \in \boldsymbol{K}(l_\infty, l_\infty)$, $D_0 \in \boldsymbol{N}_p^Q(l_\infty, l_p)$ und $K_p \in \boldsymbol{K}(l_p, l_p)$ mit $D = K_p D_0 K_\infty$.

Wir betrachten nun die folgenden Banachräume: E_1 bzw. E_0 ist die in l_∞ gebildete abgeschlossene Hülle des linearen Teilraumes aller Folgen $\{\delta_i^{-1}\langle x, a_i\rangle\}$ bzw. $\{\lambda_i \delta_i^{-1}\langle x, a_i\rangle\}$ mit $x \in E$. F_0 bzw. F_1 ist die in l_p gebildete abgeschlossene Hülle des linearen Teilraumes aller Folgen $\{\lambda_i^{-1}\langle x, a_i\rangle\}$ bzw. $\{\langle x, a_i\rangle\}$ mit $x \in E$.

Die Abbildung $P_1 \in \boldsymbol{L}(E, E_1)$ wird durch den Ansatz

$$P_1 x = \{\delta_i^{-1}\langle x, a_i\rangle\}$$

definiert. Andererseits läßt sich die Zuordnung

$$\{\langle x, a_i\rangle\} \to Tx$$

auf eindeutige Weise zu einer beschränkten linearen Abbildung $Q_1 \in \boldsymbol{L}(F_1, F)$ fortsetzen. Werden schließlich die Abbildungen $K_\infty^0 \in \boldsymbol{K}(E_1, E_0)$, $T_0 \in \boldsymbol{N}_p^Q(E_0, F_0)$ und $K_p^0 \in \boldsymbol{K}(F_0, F_1)$ durch Einschränkung der Abbildungen K_∞, D_0 und K_p gewonnen, so gilt mit den kompakten Abbildungen $P = K_\infty^0 P_1 \in \boldsymbol{K}(E, E_0)$ und $Q = Q_1 K_p^0 \in \boldsymbol{K}(F_0, F)$ die gewünschte Identität

$$T = QT_0P.$$

Als unmittelbare Folgerungen ergeben sich die beiden folgenden Aussagen:

Satz 25. *Jede quasi-p-nukleare Abbildung T ist kompakt.*

Satz 26. *Wenn E' oder F die Approximationseigenschaft besitzt, bilden die ausgearteten Abbildungen einen dichten linearen Teilraum von $\boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$.*

5. Quasi-p-integrale Abbildungen. Eine lineare Abbildung T von einen Banachraum E in einen Banachraum F heißt *quasi-p-integral*, wenn es auf der schwach kompakten Einheitskugel U^0 des dualen Banachraumes E' ein positives Maß μ gibt, für das die Beziehung

$$\|Tx\| \leqslant \Big\{\int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^p \, d\mu(a)\Big\}^{1/p}$$

besteht. Setzt man

$$\iota_p^Q(T) = \inf \mu(U^0)^{1/p},$$

wobei das Infimum über alle zulässigen positiven Maße μ gebildet wird, so ergibt sich

Satz 27. *Jede quasi-p-integrale Abbildung T ist beschränkt, und es gilt $\|T\| \leqslant \iota_p^Q(T)$.*

Satz 28. *Die Gesamtheit $\boldsymbol{I}_p^Q(E, F)$ aller quasi-p-integralen Abbildungen von E in F ist ein Banachraum mit der Norm ι_p^Q.*

Die Behauptung dieses Satzes folgt unmittelbar aus

Lemma 6. *Für jede Folge von quasi-p-integralen Abbildungen $T_n \in \boldsymbol{I}_p^Q(E, F)$ mit $\sum \iota_p^Q(T_n) < +\infty$ wird durch den Ansatz $Tx = \sum T_n x$ eine quasi-p-integrale Abbildung T definiert, und es gilt $\iota_p^Q(T) \leqslant \sum \iota_p^Q(T_n)$.*

Beweis. Der Beweis von Lemma 2 kann fast wörtlich übernommen werden.

Wir geben nun eine Charakterisierung der quasi-p-integralen Abbildungen an, die den Zusammenhang mit den in [17] durchgeführten Untersuchungen liefert. Die quasi-p-integralen Abbildungen werden dort als absolut-p-summierend bezeichnet.

Satz 29. *Eine Abbildung $T \in L(E, F)$ ist dann und nur dann quasi-p-integral, wenn es eine nicht negative Zahl ϱ gibt, so daß für jedes endliche System von Elementen $x_1, \ldots, x_n$ aus E die Ungleichung*

$$\Big\{\sum_1^n \|Tx_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \varrho \sup_{\|b\|\leqslant 1} \Big\{\sum_1^n |\langle x_i, a\rangle|^p\Big\}^{1/p}$$

besteht. Dabei gilt die Identität

$$\iota_p^Q(T) = \inf \varrho .$$

Die im folgenden aufgezählten Sätze wurden bereits in [17] bewiesen.

Satz 30. *Aus $T \in I_p^Q(E, F)$ und $S \in L(F, G)$ folgt $ST \in I_p^Q(E, G)$, und es gilt $\iota_p^Q(ST) \leqslant \|S\| \iota_p^Q(T)$.*

Aus $T \in L(E, F)$ und $S \in I_p^Q(F, G)$ folgt $ST \in I_p^Q(E, G)$, und es gilt $\iota_p^Q(ST) \leqslant \iota_p^Q(S)\|T\|$.

Satz 31. *Für zwei Zahlen p und q mit $1 \leqslant p < q < +\infty$ gilt stets $I_p^Q(E, F) \subset I_q^Q(E, F)$ und $\iota_p^Q \geqslant \iota_q^Q$.*

Satz 32. *Jede quasi-p-integrale Abbildung T ist schwach kompakt.*

Satz 33. *Jede quasi-p-integrale Abbildung T ist vollstetig.*

(Man kann sogar beweisen, daß alle schwachen Cauchy-Folgen in konvergente Folgen abgebildet werden.).

6. Beziehungen zwischen den verschiedenen Abbildungsklassen. Als erstes Ergebnis formulieren wir

Satz 34. *Jede p-nukleare Abbildung T ist p-integral, und es gilt $\iota_p(T) \leqslant \nu_p(T)$.*

Beweis. Wir betrachten eine p-nukleare Abbildung T und stellen sie in der Form $Tx = \sum \langle x, a_i\rangle y_i$ dar, so daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichungen

$$\Big\{\sum \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \nu_p(T) + \varepsilon \quad \text{und} \quad \sup_{\|b\|\leqslant 1} \Big\{\sum |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'} \leqslant 1$$

gelten. Wenn wir $\mu_i = \|a_i\|^p$, $\hat{a}_i = a_i/\|a_i\|$ und $m_i = \|a_i\| y_i$ setzen, folgt aus der Abschätzung

$$\Big\|\sum \varphi(\hat{a}_i) m_i\Big\| = \sup_{\|b\|\leqslant 1} \Big|\sum \varphi(\hat{a}_i)\|a_i\|\langle y_i, b\rangle\Big| \leqslant \Big\{\sum |\varphi(\hat{a}_i)|^p \mu_i\Big\}^{1/p},$$

daß durch den Ansatz $M(\varphi) = \sum \varphi(a_i) m_i$ auf U^0 ein p-majorisierbares F-wertiges Maß M mit

$$\mu_p(M) \leqslant \Big\{\sum \mu_i\Big\}^{1/p} \leqslant \nu_p(T) + \varepsilon$$

definiert wird. Abschließend ergibt sich aus der Identität $Tx = \sum \langle x, \hat{a}_i\rangle m_i$, daß T eine p-integrale Abbildung mit $\iota_p(T) \leqslant \nu_p(T) + \varepsilon$ ist.

Einen tieferen Einblick in die Beziehungen zwischen p-nuklearen und p-integralen Abbildungen liefert das fundamentale

Lemma 7. *Wenn E' oder F die metrische Approximationseigenschaft besitzt, kann jede ausgeartete Abbildung $T \in L_0(E, F)$ in der Form*

$$Tx = \sum_1^n \langle x, a_i\rangle y_i$$

dargestellt werden, so daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\Big\{\sum_1^n \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} \sup_{\|b\|\leqslant 1} \Big\{\sum_1^n |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'} \leqslant \iota_p(T) + \varepsilon$$

besteht.

Beweis. (Die Grundidee dieses Beweises findet man bereits in [18].) Wenn F die metrische Approximationseigenschaft besitzt, faktorisieren wir die Abbildung T auf die in Satz 16 angegebene Art

$$E \xrightarrow{P} C(U^0) \xrightarrow{I} L_p(U^0, \mu) \xrightarrow{Q} F,$$

so daß die Beziehungen

$$\mu(U^0) = 1 \quad \text{und} \quad \|Q\| \leqslant \iota_p(T) + \varepsilon/4$$

gelten. Dabei ist U^0 die schwach kompakte Einheitskugel des dualen Banachraumes E', und die Abbildung P wird durch die Zuordnung $x \to \langle x, \cdot\rangle$ definiert.

Im folgenden werden wir die Abbildung T durch kleine Veränderungen in eine Abbildung $T_0 = Q_0 IP$ überführen, so daß sich die Abbildung Q_0 mit endlich vielen disjunkten μ-meßbaren Mengen A_i in der Form

$$Q_0 f = \sum_1^n \Big[\int_{A_i} f(a)\, d\mu(a)\Big] z_i$$

darstellen läßt. Dann besteht mit den zugehörigen charakteristischen Funktionen f_{A_i} die Identität

$$Q_0' b = \sum_1^n \langle z_i, b\rangle f_{A_i},$$

aus der sich die Beziehung

$$\sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^n |\langle z_i, b\rangle|^{p'}\mu(A_i)\Big\}^{1/p'} = \sup_{\|b\|\leqslant 1}\|Q_0' b\| = \|Q_0'\| = \|Q_0\|$$

ergibt. Deshalb gilt für die Elemente (im Fall $p=1$ muß der Beweis geringfügig modifiziert werden)

$$y_i^0 = \|Q_0\|^{-1/p}\mu(A_i)^{1/p'} z_i$$

die Aussage

(1) $$\sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^n |\langle y_i^0, b\rangle|^{p'}\Big\} = \|Q_0\|.$$

Werden die Linearformen a_i^0 durch den Ansatz

$$\langle x, a_i^0\rangle = \|Q_0\|^{1/p}\mu(A_i)^{-1/p'}\int_{A_i}\langle x, a\rangle\, d\mu(a)$$

definiert, so besteht die Abschätzung

$$\|a_i^0\| \leqslant \|Q_0\|^{1/p}\mu(A_i)^{1/p},$$

und wir erhalten die Ungleichung

(2) $$\sum_1^n \|a_i^0\|^p \leqslant \|Q_0\|.$$

Damit haben wir die Abbildung T_0 auf die gewünschte Form

(3) $$T_0 x = \sum_1^n \langle x, a_i^0\rangle y_i^0$$

gebracht.

Wir führen nun die bereits angekündigte Modifikation der Abbildung T durch. Zu diesem Zweck bestimmen wir Linearformen $a_k \in E'$ mit

(4) $$\sum_1^r \|a_k\|^p \leqslant \varepsilon/4$$

und Elemente $y_k^* \in F$, so daß die Identität

$$Tx = \sum_1^r \langle x, a_k\rangle y_k^*$$

besteht. Dann existiert eine ausgeartete Abbildung $K \in \boldsymbol{L}_0(F, F)$ mit

$$\|K\| \leqslant 1 \quad \text{und} \quad \sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^r |\langle y_k^* - K y_k^*, b\rangle|^{p'}\Big\} \leqslant \varepsilon/4.$$

Deshalb gilt für die Elemente $y_k = y_k^* - K y_k^*$ die Ungleichung

(5) $$\sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^r |\langle y_k, b\rangle|^{p'}\Big\} \leqslant \varepsilon/4,$$

und mit $Q_1 = KQ$ ergibt sich die Gleichung

(6) $$Tx = \sum_1^r \langle x, a_k\rangle y_k + Q_1 IPx.$$

Die ausgeartete Abbildung Q_1 läßt sich mit Funktionen $f_k \in L_{p'}(U^0, \mu)$ und Elementen $y_{r+k} \in F$ in der Form

$$Q_1 f = \sum_{k=1}^s \Big[\int_{U^0} f(a) f_k(a)\, d\mu(a)\Big] y_{r+k}$$

darstellen. Dabei kann zusätzlich erreicht werden, daß die Ungleichung

(7) $$\sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{k=1}^s |\langle y_{r+k}, b\rangle|^{p'}\Big\} \leqslant \varepsilon/4$$

gilt. Anschließend approximieren wir die Funktionen f_k durch μ-meßbare Treppenfunktionen f_k^0, so daß die Abschätzung

$$\sum_1^s \|f_k - f_k^0\|_{L_{p'}}^p \leqslant \varepsilon/4$$

besteht. Dann ergibt sich durch den Ansatz

$$Q_0 f = \sum_{k=1}^s \Big[\int_{U^0} f(a) f_k^0(a)\, d\mu(a)\Big] y_{r+k}$$

eine Abbildung Q_0 mit $\|Q_1 - Q_0\| \leqslant \varepsilon/4$. Folglich hat man

(8) $$\|Q_0\| \leqslant \|Q_1\| + \varepsilon/4 \leqslant \iota_p(T) + \varepsilon/2.$$

Werden die Linearformen a_{r+k} durch den Ansatz

$$\langle x, a_{r+k}\rangle = \int_{U^0} \langle x, a\rangle [f_k(a) - f_k^0(a)]\, d\mu(a)$$

definiert, so gilt die Abschätzung

$$\|a_{r+k}\| \leqslant \|f_k - f_k^0\|_{L_{p'}},$$

und wir erhalten die Ungleichung

(9) $$\sum_{k=1}^s \|a_{r+k}\|^p \leqslant \varepsilon/4.$$

Außerdem besteht wegen (6) mit der natürlichen Zahl $m = r+s$ die Identität

(10) $$Tx = \sum_{k=1}^m \langle x, a_k\rangle y_k + Q_0 IPx.$$

Da sich die Treppenfunktionen f_k^0 als Linearkombinationen

$$f_k^0 = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} f_{A_i}$$

der charakteristischen Funktionen von endlich vielen disjunkten μ-meßbaren Mengen A_i darstellen lassen, können wir die Abbildung Q_0 in der gewünschten Form

$$Q_0 f = \sum_{1}^{n} \Big[\int_{A_i} f(a)\, d\mu(a) \Big] z_i$$

schreiben. Dabei werden die Elemente z_i durch die Gleichung

$$z_i = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} y_{r+k}$$

definiert.

Abschließend ergibt sich aus den Identitäten (3) und (10) für die Abbildung T die Darstellung

$$Tx = \sum_{1}^{m} \langle x, a_k \rangle y_k + \sum_{1}^{n} \langle x, a_i^0 \rangle y_i^0 .$$

Dabei gelten wegen (2), (8), (4) und (9) bzw. (1), (8), (5) und (7) die Ungleichungen

$$\sum_{1}^{m} \|a_k\|^p + \sum_{1}^{n} \|a_i^0\|^p \leqslant \iota_p(T) + \varepsilon$$

und

$$\sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{ \sum_{1}^{m} |\langle y_k, b \rangle|^{p'} + \sum_{1}^{n} |\langle y_i^0, b \rangle|^{p'} \Big\} \leqslant \iota_p(T) + \varepsilon .$$

Wenn E' die metrische Approximationseigenschaft besitzt, faktorisieren wir die Abbildung T auf die in Satz 18 angegebene Art

$$E \xrightarrow{P} L_\infty(U^0, \mu) \xrightarrow{I} L_p(U^0, \mu) \xrightarrow{Q} F ,$$

so daß die Beziehungen

$$\|P\| \leqslant \iota_p(T) + \varepsilon/4, \quad \mu(U^0) = 1 \quad \text{und} \quad \|Q\| \leqslant 1$$

bestehen. Durch ähnliche Approximationsverfahren (²) wie im ersten Teil des Beweises erhält man dann für die Abbildung T die Darstellung

$$Tx = \sum_{1}^{m} \langle x, a_k \rangle y_k + QIP_0 x .$$

(²) Wenn E' die metrische Approximationseigenschaft besitzt, gibt es zu jeder kompakten Teilmenge K von E' eine Abbildung $T \in L_0(E, E)$ mit $\|a - T'a\| \leqslant 1$ für $a \in K$. Dabei kann mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $\|T\| \leqslant 1 + \varepsilon$ erfüllt werden.

Dabei sind die Ungleichungen

$$\sum_{1}^{m} \|a_k\|^p \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad \sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{ \sum_{1}^{m} |\langle y_k, b \rangle|^{p'} \Big\} \leqslant \varepsilon/2$$

erfüllt, und die Abbildung P_0 läßt sich mit den charakteristischen Funktionen f_{A_i} von endlich vielen disjunkten μ-meßbaren Mengen A_i in der Form

$$P_0 x = \sum_{1}^{n} \langle x, u_i \rangle f_{A_i}$$

schreiben. Dann besteht für die Linearformen

$$a_i^0 = \|P_0\|^{-1/p'} \mu(A_i)^{1/p} u_i = \|P_0\|^{-1/p'} \mu(A_i)^{-1/p'} P_0' f_{A_i}$$

die Ungleichung

$$\sum_{1}^{n} \|a_i^0\|^p \leqslant \|P_0\| \leqslant \iota_p(T) + \varepsilon/2,$$

und für die Elemente

$$y_i^0 = \|P_0\|^{1/p'} \mu(A_i)^{-1/p} QIf_{A_i}$$

ergibt sich mit $g = Q'b$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{1}^{n} |\langle y_i^0, b \rangle|^{p'} &= \|P_0\| \sum_{1}^{n} \mu(A_i)^{-p'/p} |\langle QIf_{A_i}, b \rangle|^{p'} \\ &= \|P_0\| \sum_{1}^{n} \mu(A_i)^{-p'/p} \Big| \int_{A_i} g(a)\, d\mu(a) \Big|^{p'} \\ &\leqslant \|P_0\| \sum_{1}^{n} \int_{A_i} |g(a)|^{p'} d\mu(a) \leqslant \|P_0\| \|b\|^{p'} . \end{aligned}$$

Folglich gilt die Beziehung

$$\sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{ \sum_{1}^{n} |\langle y_i^0, b \rangle|^{p'} \Big\} \leqslant \|P_0\| \leqslant \iota_p(T) + \varepsilon/2,$$

und wir haben die Abbildung $T_0 = QIP_0$ auf die gewünschte Form

$$T_0 x = \sum_{1}^{n} \langle x, a_i^0 \rangle y_i^0$$

gebracht. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wir formulieren nun das erste Hauptergebnis dieses Abschnittes.

Satz 35. *Wenn E' oder F die metrische Approximationseigenschaft* (³) *besitzt, gilt für jede p-nukleare Abbildung $T \in N_p(E, F)$ die Identität $\nu_p(T) = \iota_p(T)$.*

Beweis. Auf Grund von Satz 34 genügt es, wenn wir für jede p-nukleare Abbildung T die Ungleichung $\nu_p(T) \leqslant \iota_p(T)$ beweisen. Diese Tatsache ergibt sich für ausgeartete Abbildungen unmittelbar aus Lemma 7. Der allgemeine Fall läßt sich wegen Satz 5 durch einen Grenzübergang behandeln.

Als unmittelbare Folgerung aus den Sätzen 5 und 35 ergibt sich

Satz 36. *Wenn E' oder F die metrische Approximationseigenschaft* (³) *besitzt, ist eine p-integrale Abbildung T dann und nur dann p-nuklear, falls sie sich in der ι_p-Norm durch ausgeartete Abbildungen approximieren läßt.*

Wir beschreiben nun die Beziehungen zwischen den p-nuklearen und den quasi-p-nuklearen Abbildungen.

Satz 37. *Jede p-nukleare Abbildung T ist quasi-p-nuklear, und es gilt $\nu_p^Q(T) \leqslant \nu_p(T)$.*

Beweis. Unsere Behauptung folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß für jede p-nukleare Abbildung T, die in der Form $Tx = \sum \langle x, a_i\rangle y_i$ dargestellt ist, die Abschätzung

$$\|Tx\| \leqslant \Big\{\sum |\langle x, a_i\rangle|^p\Big\}^{1/p} \sup_{\|b\|\leqslant 1} \Big\{\sum |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'}$$

gilt.

Die Umkehrung des vorangehenden Satzes ist nur unter zusätzlichen Voraussetzungen richtig.

Satz 38. *Wenn der Banachraum F die Fortsetzungseigenschaft besitzt, ist jede quasi-p-nukleare Abbildung $T \in N_p^Q(E, F)$ sogar p-nuklear, und es gilt $\nu_p(T) = \nu_p^Q(T)$.*

Beweis. Zu einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ bestimmen wir eine Folge von Linearformen $a_i \in E'$ mit

$$\Big\{\sum \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \nu_p^Q(T) + \varepsilon \quad \text{und} \quad \|Tx\| \leqslant \Big\{\sum |\langle x, a_i\rangle|^p\Big\}^{1/p}.$$

Dann bilden die Folgen $\{\langle x, a_i\rangle\}$ mit $x \in E$ einen linearen Teilraum von l_p, der durch die Zuordnung

$$\{\langle x, a_i\rangle\} \xrightarrow{Q_0} Tx$$

in den Banachraum F abgebildet wird. Dabei gilt die Aussage $\|Q_0\| \leqslant 1$.

(³) im Fall $p = 2$ gilt unsere Behauptung für beliebige Banachräume E und F. Vgl. [18].

Weil der Banachraum F die Fortsetzungseigenschaft besitzt, läßt sich die Abbildung Q_0 unter Beibehaltung der Norm zu einer Abbildung Q von ganz l_p in F erweitern. Ist e_i die i-te Einheitsfolge in l_p, so ergibt sich mit den Elementen $y_i = Qe_i$ die Darstellung $Tx = \sum \langle x, a_i\rangle y_i$. Da außerdem die Ungleichung

$$\sup_{\|b\|\leqslant 1} \Big\{\sum |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'} \leqslant 1$$

besteht, ist T eine p-nukleare Abbildung mit $\nu_p(T) \leqslant \nu_p^Q(T) + \varepsilon$.

Da sich jeder Banachraum F durch die Abbildung $Py = \langle y, \cdot\rangle$ isometrisch in den Banachraum $B(V^0)$ einbetten läßt, ergibt sich

Satz 39. *Eine Abbildung $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ ist dann und nur dann quasi-p-nuklear, wenn sie durch Vergrößerung von F sogar p-nuklear gemacht werden kann.*

Die im folgenden angegebenen Beziehungen zwischen den p-integralen und den quasi-p-integralen Abbildungen erhält man durch analoge Betrachtungen.

Satz 40. *Jede p-integrale Abbildung T ist quasi-p-integral, und es gilt $\iota_p^Q(T) \leqslant \iota_p(T)$.*

Satz 41. *Wenn der Banachraum F die Fortsetzungseigenschaft besitzt, ist jede quasi-p-integrale Abbildung $T \in \boldsymbol{I}_p^Q(E, F)$ sogar p-integral, und es gilt $\iota_p(T) = \iota_p^Q(T)$.*

Satz 42. *Eine Abbildung $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ ist dann und nur dann quasi-p-integral, wenn sie durch Vergrößerung von F sogar p-integral gemacht werden kann.*

Die Beziehungen zwischen den quasi-p-nuklearen und den quasi-p-integralen Abbildungen werden in den beiden folgenden Sätzen beschrieben.

Satz 43. *Jede quasi-p-nukleare Abbildung T ist quasi-p-integral, und es gilt $\nu_p^Q(T) = \iota_p^Q(T)$.*

Beweis. Durch die Abbildung $Py = \langle y, \cdot\rangle$ betten wir den Banachraum F isometrisch in den Banachraum $B(V^0)$ ein. Da aber $B(V^0)$ sowohl die Fortsetzungseigenschaft als auch die metrische Approximationseigenschaft besitzt, besteht auf Grund der Sätze 35, 38 und 41 die Identität

$$\nu_p^Q(T) = \nu_p^Q(PT) = \nu_p(PT) = \iota_p(PT) = \iota_p^Q(PT) = \iota_p^Q(T).$$

Als unmittelbare Folgerung aus den Sätzen 26 und 43 ergibt sich

Satz 44. *Wenn E' oder F die Approximationseigenschaft besitzt, ist eine quasi-p-integrale Abbildung T dann und nur dann quasi-p-nuklear, falls sie sich in der ι_p^Q-Norm durch ausgeartete Abbildungen approximieren läßt.*

Abschließend beziehen wir auch noch die p-majorisierbaren F-wertigen Maße in unsere Betrachtungen ein.

Satz 45. *Die auf einem kompakten Hausdorffraum A definierten p-majorisierbaren F-wertigen Maße fallen mit den quasi-p-integralen oder p-integralen Abbildungen von $C(A)$ in F zusammen, und es gilt*

$$\mu_p(M) = \iota_p^Q(M) = \iota_p(M).$$

Beweis. Wenn M eine quasi-p-integrale Abbildung von $C(A)$ in F ist, gibt es auf der schwach kompakten Einheitskugel U^0 des Banachraumes $C(A)'$ ein positives Maß $\hat{\mu}$ mit

$$\|M(\varphi)\| \leqslant \Big\{\int_{U^0} |\langle\varphi, \nu\rangle|^p \, d\hat{\mu}(\nu)\Big\}^{1/p} \quad \text{und} \quad \hat{\mu}(U^0)^{1/p} \leqslant \iota_p^Q(M) + \varepsilon.$$

Dann wird auf A durch den Ansatz

$$\int_A \varphi(a)\, d\mu(a) = \int_{U^0} \langle\varphi, |\nu|\rangle \, d\hat{\mu}(\nu)$$

ein positives Maß μ mit $\mu(A) \leqslant \hat{\mu}(U^0)$ definiert. Da auf Grund der Hölderschen Ungleichung für $\nu \in U^0$ die Abschätzung

$$|\langle\varphi, \nu\rangle|^p \leqslant \langle|\varphi|, |\nu|\rangle^p \leqslant \langle|\varphi|^p, |\nu|\rangle$$

besteht, hat man

$$\|M(\varphi)\| \leqslant \Big\{\int_{U^0} \langle|\varphi|^p, |\nu|\rangle \, d\hat{\mu}(\nu)\Big\}^{1/p} = \Big\{\int_A |\varphi(a)|^p \, d\mu(a)\Big\}^{1/p}.$$

Folglich ist M ein p-majorisierbares F-wertiges Maß, und est gilt $\mu_p(M) \leqslant \iota_p^Q(M) + \varepsilon$. Andererseits folgt aus der Ungleichung

$$\|M(\varphi)\| \leqslant \Big\{\int_A |\varphi(a)|^p \, d\mu(a)\Big\}^{1/p},$$

daß sich jedes p-majorisierbare F-wertige Maß M zu einer beschränkten linearen Abbildung Q von $\boldsymbol{L}_p(A, \mu)$ in F mit $\|Q\| \leqslant 1$ fortsetzen läßt. Dann ergibt sich aber aus Satz 15, daß $M = QI$ eine p-integrale und deshalb auch quasi-p-integrale Abbildung mit $\iota_p^Q(M) \leqslant \mu_p(M) \leqslant \mu(A)^{1/p}$ ist.

Der vorangehende Satz enthält insbesondere die folgende Aussage, die als Gegenstück zu Satz 41 angesehen werden kann.

Satz 46. *Jede quasi-p-integrale Abbildung T von $C(A)$ in einen Banachraum F ist p-integral, und es gilt $\iota_p(T) = \iota_p^Q(T)$.*

Als entsprechendes Gegenstück zu Satz 38 ergibt sich

Satz 47. *Jede quasi-p-nukleare Abbildung T von $C(A)$ in einen Banachraum F ist p-nuklear, und es gilt $\nu_p(T) = \nu_p^Q(T)$.*

Beweis. Weil der Banachraum $C(A)'$ die Approximationseigenschaft besitzt, gibt es nach Satz 26 eine Folge von ausgearteten Abbildungen T_n mit ν_p^Q-$\lim T_n = T$. Da auf Grund der Sätze 46 und 43 die Identität $\iota_p(T - T_n) = \iota_p^Q(T - T_n) = \nu_p^Q(T - T_n)$ besteht, ergibt sich die Aussage ι_p-$\lim T_n = T$. Nun folgt aber aus Satz 36, daß T eine p-nukleare Abbildung mit $\nu_p(T) = \nu_p^Q(T)$ ist.

Für zwei beliebige Banachräume E und F bestehen die Identitäten

$$\boldsymbol{N}_2(E, F) = \boldsymbol{N}_2^Q(E, F) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{I}_2(E, F) = \boldsymbol{I}_2^Q(E, F).$$

Dagegen gelten für den Hilbertraum l_2 nach Satz 56 die Aussagen

$$\boldsymbol{N}_1(l_2, l_2) \neq \boldsymbol{N}_1^Q(l_2, l_2) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{I}_1(l_2, l_2) \neq \boldsymbol{I}_1^Q(l_2, l_2).$$

Obwohl noch keine Beispiele bekannt sind, darf angenommen werden, daß es zu jeder Zahl $p \neq 2$ quasi-p-nukleare bzw. quasi-p-integrale Abbildungen gibt, die nicht p-nuklear bzw. p-integral sind (4).

7. Multiplikationssätze. Wir beginnen diesen Abschnitt mit dem fundamentalen (5)

Lemma 8. *Ist $\{x_i\}$ eine Folge von Elementen eines Banachraumes E mit*

$$\sup_{\|a\| \leqslant 1} \Big\{\sum |\langle x_i, a\rangle|^r\Big\}^{1/r} \leqslant 1,$$

dann läßt sich die Bildfolge $\{Tx_i\}$ für jede quasi-p-integrale Abbildung $T \in \boldsymbol{I}_p^Q(E, F)$ mit $p > r$ in der Form $Tx_i = a_i y_i$ schreiben, so daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Beziehungen

$$\Big\{\sum |a_i|^p\Big\}^{1/p} \leqslant 1 \quad \textit{und} \quad \sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{\sum |\langle y_i, b\rangle|^q\Big\}^{1/q} \leqslant \iota_p^Q(T) + \varepsilon$$

gelten. Dabei ergibt sich die Zahl q aus der Indentität $1/r = 1/p + 1/q$.

Beweis (Skizze). Auf der schwach kompakten Einheitskugel U^0 von E' bestimmen wir ein positives Maß μ mit $\mu(U^0)^{1/p} \leqslant \iota_p^Q(T) + \varepsilon$, für das die Beziehung $\|Tx\| \leqslant \big\{\int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^p \, d\mu(a)\big\}^{1/p}$ besteht. Dann gilt für die Zahlen

$$a_i = \Big\{\mu(U^0)^{-1} \int_{U^0} |\langle x_i, a\rangle|^r \, d\mu(a)\Big\}^{1/p}$$

die Aussage $\{\sum |a_i|^p\}^{1/p} \leqslant 1$, und wie im Beweis von Theorem 4 aus [17] ergibt sich für die Elemente $y_i = a_i^{-1} Tx_i$ die Ungleichung

$$\sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{\sum |\langle y_i, b\rangle|^q\Big\}^{1/q} \leqslant \iota_p^Q(T) + \varepsilon.$$

(4) Diese Vermutung wurde inzwischen von A. Pełczyński bestätigt.

(5) In diesem Lemma fixieren wir die Grundidee des Beweises von Theorem 4 aus [17].

Nun formulieren wir das Hauptergebnis dieses Abschnittes.

Satz 48. *Unter der Voraussetzung $1/r = 1/p+1/q \leqslant 1$ gilt für zwei Abbildungen $T \in \boldsymbol{L}(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{L}(F, G)$ die folgende Multiplikationstabelle:*

$T \backslash S$	N_q	N_q^Q	I_q	I_q^Q
N_p	N_r	N_r	N_r	N_r
N_p^Q	N_r	N_r^Q	N_r	N_r^Q
I_p	N_r	N_r	I_r	I_r
I_p^Q	N_r	N_r^Q	I_r	I_r^Q

Dabei kann die entsprechende Norm des Produktes ST durch das Produkt der jeweiligen Normen von S und T abgeschätzt werden.

Beispiel. *Aus $T \in \boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{I}_q(F, G)$ folgt $ST \in \boldsymbol{N}_r(E, G)$, und es gilt $\boldsymbol{\nu}_r(ST) \leqslant \boldsymbol{\iota}_q(S)\boldsymbol{\iota}_p^Q(T)$.*

Beweis. (1) $T \in \boldsymbol{I}_p^Q(E, F)$, $S \in \boldsymbol{I}_q^Q(F, G)$. Wir betrachten ein beliebiges endliches System von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in E$ mit

$$\sup_{\|a\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^n |\langle x_i, a\rangle|^r\Big\}^{1/r} \leqslant 1.$$

Dann lassen sich die Bilder $Tx_1, \ldots, Tx_n$ nach Lemma 8 in der Form $Tx_i = \alpha_i y_i$ schreiben, so daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichungen

$$\Big\{\sum_1^n |\alpha_i|^p\Big\}^{1/p} \leqslant 1 \quad \text{und} \quad \sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^n |\langle y_i, b\rangle|^q\Big\}^{1/q} \leqslant \boldsymbol{\iota}_p^Q(T)+\varepsilon$$

gelten. Nun ergibt sich wegen Satz 29 die Abschätzung

$$\Big\{\sum_1^n \|STx_i\|^r\Big\}^{1/r} \leqslant \Big\{\sum_1^n |\alpha_i|^p\Big\}^{1/p}\Big\{\sum_1^n \|Sy_i\|^q\Big\}^{1/q}$$
$$\leqslant \boldsymbol{\iota}_q^Q(S) \sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^n |\langle y_i, b\rangle|^q\Big\}^{1/q}$$
$$\leqslant \boldsymbol{\iota}_q^Q(S)[\boldsymbol{\iota}_p^Q(T)+\varepsilon],$$

aus der wiederum nach Satz 29 folgt, daß das Produkt ST eine quasi-r-integrale Abbildung mit $\boldsymbol{\iota}_r^Q(ST) \leqslant \boldsymbol{\iota}_q^Q(S)\boldsymbol{\iota}_p^Q(T)$ ist.

(2) $T \in \boldsymbol{N}_p(E, F)$, $S \in \boldsymbol{I}_q^Q(F, G)$. Wir stellen die Abbildung T in der Form $Tx = \sum\langle x, a_i\rangle y_i$ dar, so daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichungen

$$\Big\{\sum \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \boldsymbol{\nu}_p(T)+\varepsilon \quad \text{und} \quad \sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'} \leqslant 1$$

bestehen. Wegen Lemma 8 und der Gleichung $1/p' = 1/q+1/r'$ läßt sich dann die Bildfolge $\{Sy_i\}$ in der Form $Sy_i = \alpha_i z_i$ mit

$$\Big\{\sum |\alpha_i|^q\Big\}^{1/q} \leqslant 1 \quad \text{und} \quad \sup_{\|c\|\leqslant 1}\Big\{\sum |\langle z_i, c\rangle|^{r'}\Big\}^{1/r'} \leqslant \boldsymbol{\iota}_q^Q(S)+\varepsilon$$

schreiben. Abschließend folgt aus der Identität

$$STx = \sum\langle x, \alpha_i a_i\rangle z_i$$

und der Ungleichung

$$\Big\{\sum \|\alpha_i a_i\|^r\Big\}^{1/r} \leqslant \Big\{\sum |\alpha_i|^q\Big\}^{1/q}\Big\{\sum \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} \leqslant \boldsymbol{\nu}_p(T)+\varepsilon,$$

daß das Produkt ST eine r-nukleare Abbildung mit

$$\boldsymbol{\nu}_r(ST) \leqslant [\boldsymbol{\iota}_q^Q(S)+\varepsilon][\boldsymbol{\nu}_p(T)+\varepsilon]$$

ist.

(3) $T \in \boldsymbol{N}_p(E, F)$, $S \in \boldsymbol{I}_q(F, G)$. Die Aussage $ST \in \boldsymbol{N}_r(E, G)$ und die Ungleichung $\boldsymbol{\nu}_r(ST) \leqslant \boldsymbol{\iota}_q(S)\boldsymbol{\nu}_p(T)$ erhält man unmittelbar aus (2) und Satz 40.

(4) $T \in \boldsymbol{N}_p(E, F)$, $S \in \boldsymbol{N}_q(F, G)$. Die Aussage $ST \in \boldsymbol{N}_r(E, G)$ und die Ungleichung $\boldsymbol{\nu}_r(ST) \leqslant \boldsymbol{\nu}_q(S)\boldsymbol{\nu}_p(T)$ erhält man unmittelbar aus (3) und Satz 34.

(5) $T \in \boldsymbol{N}_p(E, F)$, $S \in \boldsymbol{N}_q^Q(F, G)$. Die Aussage $ST \in \boldsymbol{N}_r(E, F)$ und die Ungleichung $\boldsymbol{\nu}_r(ST) \leqslant \boldsymbol{\nu}_q^Q(S)\boldsymbol{\nu}_p(T)$ erhält man unmittelbar aus (2) und Satz 43.

(6) $T \in \boldsymbol{I}_p(E, F)$, $S \in \boldsymbol{I}_q^Q(F, G)$. Nach Satz 16 gibt es zu der Abbildung T eine Zerlegung

$$E \xrightarrow{P} C(U^0) \xrightarrow{I} L_p(U^0, \mu) \xrightarrow{Q} F$$

mit $\|P\| \leqslant 1$, $\|Q\| \leqslant 1$ und $\boldsymbol{\iota}_p(I) \leqslant \boldsymbol{\iota}_p(T)+\varepsilon$. Dann ist die Abbildung SQI nach (1) und Satz 40 quasi-r-integral, und aus Satz 46 ergibt sich sogar die r-Integrabilität. Dabei gilt die Ungleichung

$$\boldsymbol{\iota}_r(SQI) = \boldsymbol{\iota}_r^Q(SQI) \leqslant \boldsymbol{\iota}_q^Q(S)\boldsymbol{\iota}_p^Q(I) \leqslant \boldsymbol{\iota}_q^Q(S)[\boldsymbol{\iota}_p(T)+\varepsilon].$$

Folglich ist das Produkt ST eine r-integrale Abbildung, und man hat $\boldsymbol{\iota}_r(ST) \leqslant \boldsymbol{\iota}_q^Q(S)\boldsymbol{\iota}_p(T)$.

(7) $T \in \boldsymbol{I}_p(E, F)$, $S \in \boldsymbol{I}_q(F, G)$. Die Aussage $ST \in \boldsymbol{I}_r(E, G)$ und die Ungleichung $\iota_r(ST) \leqslant \iota_q(S)\iota_p(T)$ erhält man unmittelbar aus (6) und Satz 40.

(8) $T \in \boldsymbol{I}_p^Q(E, F)$, $S \in \boldsymbol{I}_q(F, G)$. Nach Satz 18 gibt es zu der Abbildung S eine Zerlegung

$$F \xrightarrow{P} L_\infty(V^0, \mu) \xrightarrow{I} L_q(V^0, \mu) \xrightarrow{Q} G$$

mit $\|P\| \leqslant 1$, $\|Q\| \leqslant 1$ und $\iota_q(I) \leqslant \iota_q(S) + \varepsilon$. Weil der Banachraum $L_\infty(V^0, \mu)$ die Fortsetzungseigenschaft besitzt, ist PT nach Satz 41 eine p-integrale Abbildung mit $\iota_p(PT) \leqslant \iota_p^Q(T)$. Nun folgt aus (7), daß das Produkt ST eine r-integrale Abbildung mit

$$\iota_r(ST) \leqslant \|Q\|\iota_q(I)\iota_p(PT) \leqslant [\iota_q(S)+\varepsilon]\iota_p^Q(T)$$

ist.

(9) $T \in \boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$, $S \in \boldsymbol{I}_q(F, G)$. Nach Satz 18 gibt es zu der Abbildung S eine Zerlegung

$$F \xrightarrow{P} L_\infty(V^0, \mu) \xrightarrow{I} L_q(V^0, \mu) \xrightarrow{Q} G$$

mit $\|P\| \leqslant 1$, $\|Q\| \leqslant 1$ und $\iota_q(I) \leqslant \iota_q(S) + \varepsilon$. Weil der Banachraum $L_\infty(V^0, \mu)$ die Fortsetzungseigenschaft besitzt, ist PT nach Satz 38 eine p-nukleare Abbildung mit $\nu_p(PT) \leqslant \nu_p^Q(T)$. Nun folgt aus (3), daß das Produkt ST eine r-nukleare Abbildung mit

$$\nu_r(ST) \leqslant \|Q\|\iota_q(I)\nu_p(PT) \leqslant [\iota_q(S)+\varepsilon]\nu_p^Q(T)$$

ist.

(10) $T \in \boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$, $S \in \boldsymbol{I}_q^Q(F, G)$. Durch die Abbildung $Kz = \langle z, \cdot\rangle$ betten wir den Banachraum G isometrisch in den Banachraum $B(W^0)$ ein. Weil $B(W^0)$ die Fortsetzungseigenschaft besitzt, ist KS nach Satz 41 eine q-integrale Abbildung mit $\iota_q(KS) \leqslant \iota_q^Q(S)$. Nun folgt aus (9), daß KST eine r-nukleare Abbildung mit $\nu_r(KST) \leqslant \iota_q(KS)\nu_p^Q(T)$ ist. Deshalb muß das Produkt ST nach Satz 39 eine quasi-r-nukleare Abbildung mit $\nu_r^Q(ST) \leqslant \iota_q(S)\nu_p^Q(T)$ sein.

(11) $T \in \boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$, $S \in \boldsymbol{N}_q^Q(F, G)$. Die Aussage $ST \in \boldsymbol{N}_r^Q(E, G)$ und die Ungleichung $\nu_r^Q(ST) \leqslant \nu_q^Q(S)\nu_p^Q(T)$ erhält man unmittelbar aus (10) und Satz 43.

(12) $T \in \boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$, $S \in \boldsymbol{N}_q(F, G)$. Die Aussage $ST \in \boldsymbol{N}_r(E, G)$ und die Ungleichung $\nu_r(ST) \leqslant \nu_q(S)\nu_p^Q(T)$ erhält man unmittelbar aus (9) und Satz 34.

(13) $T \in \boldsymbol{I}_p(E, F)$, $S \in \boldsymbol{N}_q^Q(F, G)$. Nach Satz 16 gibt es zu der Abbildung T eine Zerlegung

$$E \xrightarrow{P} C(U^0) \xrightarrow{I} L_p(U^0, \mu) \xrightarrow{Q} F$$

mit $\|P\| \leqslant 1$, $\|Q\| \leqslant 1$ und $\iota_p(I) \leqslant \iota_p(T) + \varepsilon$. Weil der Banachraum $L_p(U^0, \mu)'$ die Approximationseigenschaft besitzt, existiert nach Satz 26 eine Folge von ausgearteten Abbildungen $R_n \in L_0(L_p(U^0, \mu), G)$ mit

$$\nu_q^Q\text{-}\lim R_n = SQ.$$

Da nach (6) und Satz 43 die Abschätzung

$$\iota_r^Q(SQI - R_nI) \leqslant \iota_q^Q(SQ - R_n)\iota_p(I) = \nu_q^Q(SQ-R_n)\iota_p(I)$$

besteht, hat man

$$\iota_r^Q\text{-}\lim R_nI = SQI.$$

Deshalb ist die Abbildung SQI nach Satz 44 quasi-r-nuklear, und aus Satz 47 ergibt sich sogar die r-Nuklearität. Dabei gilt die Ungleichung

$$\nu_r(SQI) = \nu_r^Q(SQI) = \iota_r^Q(SQI) \leqslant \iota_q^Q(S)\iota_p(I) \leqslant \nu_q^Q(S)[\iota_p(T)+\varepsilon].$$

Folglich ist das Produkt ST eine r-nukleare Abbildung, und man hat $\nu_r(ST) \leqslant \nu_q^Q(S)\iota_p(T)$.

(14) $T \in \boldsymbol{I}_p(E, F)$, $S \in \boldsymbol{N}_q(F, G)$. Die Aussage $ST \in \boldsymbol{N}_r(E, G)$ und die Ungleichung $\nu_r(ST) \leqslant \nu_q(S)\iota_p(T)$ erhält man unmittelbar aus (13) und Satz 37.

(15) $T \in \boldsymbol{I}_p^Q(E, F)$, $S \in \boldsymbol{N}_q(F, G)$. Nach Satz 8 gibt es zu der Abbildung S eine Zerlegung

$$F \xrightarrow{P} l_\infty \xrightarrow{D} l_q \xrightarrow{Q} G$$

mit $\|P\| \leqslant 1$, $\|Q\| \leqslant 1$ und $\nu_q(D) \leqslant \nu_q(S) + \varepsilon$. Weil der Banachraum l_∞ die Fortsetzungseigenschaft besitzt, ist PT nach Satz 41 eine p-integrale Abbildung mit $\iota_p(PT) \leqslant \iota_p^Q(T)$.

Nun folgt aus (14), daß das Produkt ST eine r-nukleare Abbildung mit $\nu_r(ST) \leqslant \nu_q(S)\iota_p^Q(T)$ ist.

(16) $T \in \boldsymbol{I}_p^Q(E, F)$, $S \in \boldsymbol{N}_q^Q(F, G)$. Durch die Abbildung $Kz = \langle z, \cdot\rangle$ betten wir den Banachraum G isometrisch in den Banachraum $B(W^0)$ ein. Weil $B(W^0)$ die Fortsetzungseigenschaft besitzt, ist KS nach Satz 38 eine q-nukleare Abbildung mit $\nu_q(KS) \leqslant \nu_q^Q(S)$.

Nun folgt aus (15), daß KST eine r-nukleare Abbildung mit $\nu_r(KST) \leqslant \nu_q(KS)\iota_p^Q(T)$ ist. Deshalb muß das Produkt ST nach Satz 39 eine quasi-r-nukleare Abbildung mit $\nu_r^Q(ST) \leqslant \nu_q^Q(S)\iota_p^Q(T)$ sein.

Wenn die Voraussetzung $1/p + 1/q \leqslant 1$ nicht erfüllt ist, bleibt Satz 48 richtig, falls man $r = 1$ setzt. Schärfere Aussagen können erst dann formuliert werden, wenn es gelingt, die von uns untersuchten Abbildungsklassen auch für Zahlen p mit $0 < p < 1$ zu definieren.

Wir beweisen nun einen Multiplikationssatz mit völlig anderem Charakter.

Satz 49. *Aus* $T \in \boldsymbol{K}(E, F)$ *und* $S \in \boldsymbol{I}_p(F, G)$ *folgt stets* $ST \in \boldsymbol{N}_p(E, G)$, *und es gilt* $\nu_p(ST) \leqslant \iota_p(S)\|T\|$.

Aus $T \in \boldsymbol{I}_p(E, F)$ *und* $S \in \boldsymbol{K}(F, G)$ *folgt stets* $ST \in \boldsymbol{N}_p(E, G)$, *und es gilt* $\nu_p(ST) \leqslant \|S\|\iota_p(T)$.

Beweis. Nach Satz 16 gibt es zu der p-integralen Abbildung S eine Zerlegung

$$F \xrightarrow{P} C(V^0) \xrightarrow{I} L_p(V^0, \mu) \xrightarrow{Q} G$$

mit $\|P\| \leqslant 1$ und $\|Q\| \leqslant 1$, so daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\iota_p(I) = \mu(V^0)^{1/p} \leqslant \iota_p(S) + \varepsilon$$

besteht. Weil der Banachraum $C(V^0)$ die metrische Approximationseigenschaft besitzt, existiert eine Folge von ausgearteten Abbildungen $P_n \in \boldsymbol{L}_0(F, C(V^0))$ mit

$$\|P_n\| \leqslant 1 \quad \text{und} \quad \lim_n \|PT - P_nT\| = 0.$$

Nun ergibt sich aus Satz 35 die Abschätzung

$$\nu_p(IP_nT - IP_mT) = \iota_p(IP_nT - IP_mT) \leqslant [\iota_p(S) + \varepsilon]\|P_nT - P_mT\|,$$

und man erkennt, daß die Cauchy-Folge $\{IP_nT\}$ in $\boldsymbol{N}_p(E, L_p(V^0, \mu))$ einen Grenzwert hat, der mit der Abbildung IPT zusammenfällt. Folglich ist das Produkt $ST = QIPT$ eine p-nukleare Abbildung mit

$$\nu_p(ST) \leqslant \nu_p(IPT) = \lim_n \nu_p(IP_nT) = \lim_n \iota_p(IP_nT) \leqslant [\iota_p(S) + \varepsilon]\|T\|.$$

Da sich der zweite Teil unserer Behauptung durch analoge Betrachtungen ergibt, verzichten wir auf die Durchführung des Beweises.

Zum Beweis des folgenden Satzes benötigen wir

Lemma 9. *Aus* $T \in \boldsymbol{W}(E, F)$ *und* $S \in \boldsymbol{V}(F, G)$ *folgt* $ST \in \boldsymbol{K}(E, G)$.

Beweis. Jede beschränkte Folge $\{x_n\}$ aus E wird durch T in eine relativ schwach kompakte Folge $\{Tx_n\}$ abgebildet. Da die relativ schwach kompakten Teilmengen eines Banachraumes jedoch auch relativ schwach folgenkompakt sind, kann man eine schwach konvergente Teilfolge $\{Tx_{n_i}\}$ finden, die durch S in eine konvergente Folge $\{STx_{n_i}\}$ überführt wird.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 33 und Lemma 9 erhält man

Satz 50. *Aus* $T \in \boldsymbol{W}(E, F)$ *und* $S \in \boldsymbol{I}_p^Q(E, G)$ *folgt* $ST \in \boldsymbol{K}(E, G)$.

Wie die identische Abbildung von $C[0, 1]$ in den reflexiven Banachraum $L_p[0, 1]$ zeigt, ist das Produkt von einer p-integralen Abbildung mit einer schwach kompakten Abbildung für $p > 1$ im allgemeinen nicht kompakt. Für den Fall $p = 1$ bewies dagegen schon A. Grothendieck [4] den folgenden

Satz 51. *Aus* $T \in \boldsymbol{W}(E, F)$ *und* $S \in \boldsymbol{I}_1(F, G)$ *folgt* $ST \in \boldsymbol{N}_1(E, G)$. *Aus* $T \in \boldsymbol{I}_1(E, F)$ *und* $S \in \boldsymbol{W}(F, G)$ *folgt* $ST \in \boldsymbol{N}_1(E, G)$.

8. Dualitätstheorie. Der Ausgangspunkt für die in diesem Abschnitt entwickelte Dualitätstheorie ist das im wesentlichen auf A. Grothendieck [4] zurückgehende

Lemma 10. *Wenn* E' *die Approximationseigenschaft besitzt, hat jede 1-nukleare Abbildung* $T \in \boldsymbol{N}_1(E, E'')$ *eine eindeutig bestimmte Spur:*

$$\mathrm{Spur}(T) = \sum \langle x_i'', a_i \rangle.$$

Dabei ist $Tx = \sum \langle x, a_i \rangle x_i''$ *eine beliebige Darstellung der Abbildung* T *mit* $\sum \|a_i\|\,\|x_i''\| < +\infty$, *und es gilt*

$$|\mathrm{Spur}(T)| \leqslant \nu_1(T).$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein gerichtetes System von ausgearteten Abbildungen $S_\nu \in_0 \boldsymbol{L}(E', E')$, so daß zu jeder kompakten Teilmenge K von E' ein Index ν_0 mit $\|a - S_\nu a\| \leqslant 1$ für $a \in K$ und $\nu \geqslant \nu_0$ existiert.

Wir betrachten nun eine zulässige Darstellung $Tx = \sum \langle x, a_i \rangle x_i''$ und bestimmen eine Folge von positiven Zahlen α_i mit

$$\lim_i \alpha_i^{-1} = 0 \quad \text{und} \quad \sum \alpha_i \|a_i\|\,\|x_i''\| \leqslant 1.$$

Dann konvergieren die Linearformen $(\alpha_i\|a_i\|)^{-1} a_i$ gegen 0, und es gibt zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index ν_ε mit

$$\|a_i - S_\nu a_i\| \leqslant \varepsilon \alpha_i \|a_i\| \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots \text{ und } \nu \geqslant \nu_\varepsilon.$$

Deshalb bestehen die Abschätzungen

$$\Big|\sum \langle x_i'', a_i \rangle - \sum \langle x_i'', S_\nu a_i \rangle\Big| \leqslant \varepsilon \quad \text{für } \nu \geqslant \nu_\varepsilon,$$

und wir erhalten die Beziehung

$$\mathrm{Spur}(T) = \sum \langle x_i'', a_i \rangle = \lim_\nu \sum \langle x_i'', S_\nu a_i \rangle.$$

Da jedoch mit beliebigen endlichen Darstellungen

$$S_\nu a = \sum_j \langle x_{\nu j}'', a \rangle a_{\nu j}$$

die Identitäten

$$\sum_i \langle x_i'', S_\nu a_i \rangle = \sum_{i,j} \langle x_i'', a_{\nu j} \rangle \langle x_{\nu j}'', a_i \rangle = \sum_j \langle T'' x_{\nu j}'', a_{\nu j} \rangle$$

gelten, hat man

$$\mathrm{Spur}(T) = \lim_\nu \sum_j \langle T'' x_{\nu j}'', a_{\nu j} \rangle.$$

Damit haben wir gezeigt, daß die Definition der Spur von der speziellen Wahl der Darstellung $Tx = \sum \langle x, a_i\rangle x_i''$ unabhänging ist.

Im folgenden sind p und p' stets zwei konjugierte Exponenten mit $1 < p,\ p' < +\infty$. Dann gilt

SATZ 52. *Wenn E' oder F die Approximationseigenschaft besitzt, wird für jede Abbildung $S \in \boldsymbol{I}_{p'}^Q(F, E'')$ durch den Ansatz*

$$\langle T, S\rangle = \mathrm{Spur}(ST)$$

auf $\boldsymbol{N}_p(E, F)$ eine Linearform S mit der Norm $\boldsymbol{\iota}_{p'}^Q(S)$ definiert. Da sich jede beschränkte Linearform auf diese Weise erzeugen läßt, können die Banachräume $\boldsymbol{I}_{p'}^Q(F, E'')$ und $\boldsymbol{N}_p(E, F)'$ miteinander identifiziert werden.

Beweis. Wir setzen voraus, daß E' die Approximationseigenschaft besitzt. Dann gilt nach Satz 48 und Lemma 10 für $T \in \boldsymbol{N}_p(E, F)$ und $S \in \boldsymbol{I}_{p'}^Q(F, E'')$ stets die Abschätzung

$$|\mathrm{Spur}(ST)| \leqslant \boldsymbol{\iota}_{p'}^Q(S)\,\boldsymbol{\nu}_p(T).$$

Deshalb wird durch die Zuordnung $T \to \mathrm{Spur}(ST)$ auf $\boldsymbol{N}_p(E, F)$ eine Linearform S definiert, deren Norm nicht größer als $\boldsymbol{\iota}_{p'}^Q(S)$ ist.

Wir zeigen nun, daß sich jede beschränkte Linearform $S \in \boldsymbol{N}_p(E, F)'$ mit der Norm $\boldsymbol{\nu}_p(S)'$ in der Form $\langle T, S\rangle = \mathrm{Spur}(ST)$ darstellen läßt, so daß für die Abbildung $S \in \boldsymbol{I}_{p'}^Q(F, E'')$ die Identität $\boldsymbol{\iota}_{p'}^Q(S) = \boldsymbol{\nu}_p(S)'$ besteht.

Zuerst bestimmen wir die Abbildung S. Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit $a \otimes y$ diejenige ausgeartete Abbildung, die durch die Zuordnung $x \to \langle x, a\rangle y$ definiert wird. Dann folgt aus der Abschätzung

$$|\langle a\otimes y, S\rangle| \leqslant \boldsymbol{\nu}_p(S)'\,\boldsymbol{\nu}_p(a\otimes y) \leqslant \boldsymbol{\nu}_p(S)'\,\|a\|\,\|y\|,$$

daß der Ausdruck $\langle a\otimes y, S\rangle$ eine stetige Bilinearform auf $E' \times F$ ist. Deshalb gibt es eine Abbildung $S \in \boldsymbol{L}(F, E'')$ mit $\langle a\otimes y, S\rangle = \langle Sy, a\rangle$. Da für jede p-nukleare Abbildung $Tx = \sum \langle x, a_i\rangle y_i$ die Identität

$$\mathrm{Spur}(ST) = \sum \langle Sy_i, a_i\rangle = \sum \langle a_i \otimes y_i, S\rangle = \langle T, S\rangle$$

besteht, stimmt die Zuordnung $T \to \mathrm{Spur}(ST)$ mit der vorgegebenen Linearform S überein.

Abschließend betrachten wir ein endliches System von Elementen $y_1, \ldots, y_n \in F$. Dann gibt es zu jeder vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ beschränkte Linearformen $a_1, \ldots, a_n \in E'$ mit $\|Sy_i\| = \langle Sy_i, a_i\rangle$ und $\|a_i\| \leqslant 1+\varepsilon$. Deshalb besteht für die durch den Ansatz

$$Tx = \sum_1^n \lambda_i \langle x, a_i\rangle y_i$$

definierte Abbildung T die Ungleichung

$$\boldsymbol{\nu}_p(T) \leqslant [1+\varepsilon]\Big\{\sum_1^n |\lambda_i|^p\Big\}^{1/p} \sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^n |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'},$$

und wir erhalten aus der Identität

$$\sum_1^n \lambda_i \|Sy_i\| = \sum_1^n \lambda_i \langle Sy_i, a_i\rangle = \langle T, S\rangle$$

die Abschätzung

$$\sum_1^n \lambda_i \|Sy_i\| \leqslant [1+\varepsilon]\,\boldsymbol{\nu}_p(S)'\Big\{\sum_1^n |\lambda_i|^p\Big\}^{1/p} \sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^n |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'}.$$

Da die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ völlig beliebig waren, ergibt sich in Verbindung mit dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ die Aussage

$$\Big\{\sum_1^n \|Sy_i\|^{p'}\Big\}^{1/p'} \leqslant \boldsymbol{\nu}_p(S)' \sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^n |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'},$$

und aus Satz 29 folgt, daß S eine quasi-p'-integrale Abbildung mit $\boldsymbol{\iota}_{p'}^Q(S) \leqslant \boldsymbol{\nu}_p(S)'$ ist. Da wir jedoch bereits gezeigt haben, daß die Norm der Linearform S nicht größer als $\boldsymbol{\iota}_{p'}^Q(S)$ sein kann, gilt in der vorangehenden Ungleichung sogar das Gleichheitszeichen.

Wir setzen nun voraus, daß F die metrische Approximationseigenschaft [6] besitzt, und stellen fest, daß die Abbildung $ST \in \boldsymbol{L}_0(E, E'')$ für jede ausgeartete Abbildung $T \in \boldsymbol{L}_0(E, F)$ eine eindeutig bestimmte Spur hat, die durch die Gleichung

$$\mathrm{Spur}(ST) = \sum_1^n \langle Sy_i, a_i\rangle$$

definiert wird. Dabei ist

$$Tx = \sum_1^n \langle x, a_i\rangle y_i$$

eine beliebige Darstellung der Abbildung T, die man auf Grund von Lemma 7 und Satz 34 so wählen kann, daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\Big\{\sum_1^n \|a_i\|^p\Big\}^{1/p} \sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^n |\langle y_i, b\rangle|^{p'}\Big\}^{1/p'} \leqslant \boldsymbol{\nu}_p(T)+\varepsilon$$

besteht. Deshalb gilt die Abschätzung

$$|\mathrm{Spur}(ST)| \leqslant \Big\{\sum_1^n \|a_i\|^p\Big\}^{1/p}\Big\{\sum_1^n \|Sy_i\|^{p'}\Big\}^{1/p'} \leqslant \boldsymbol{\iota}_{p'}^Q(S)\,[\boldsymbol{\nu}_p(T)+\varepsilon],$$

[6] Alle Überlegungen werden wesentlich komplizierter, wenn man nur die Approximationseigenschaft benutzen will.

und man erkennt, daß durch die Zuordnung $T \to \operatorname{Spur}(ST)$ auf dem dichten linearen Teilraum $\boldsymbol{L}_0(E, F)$ von $\boldsymbol{N}_p(E, F)$ eine beschränkte Linearform S definiert wird, die sich in eindeutiger Weise auf den ganzen Raum $\boldsymbol{N}_p(E, F)$ fortsetzen läßt. Dabei folgt aus der Ungleichung

$$|\operatorname{Spur}(ST)| \leqslant \iota_{p'}^{Q}(S)\,\nu_p(T),$$

daß die Norm der Linearform S nicht größer als $\iota_{p'}^{Q}(S)$ ist. Nun kann man den Beweis wie im vorausgehenden Fall zu Ende führen.

Satz 53. *Wenn E' oder F die Approximationseigenschaft besitzt, wird für jede Abbildung $S \in \boldsymbol{I}_{p'}(F, E'')$ durch den Ansatz*

$$\langle T, S\rangle = \operatorname{Spur}(ST)$$

auf $\boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$ eine Linearform S mit der Norm $\iota_{p'}(S)$ definiert. Da sich jede beschränkte Linearform auf diese Weise erzeugen läßt, können die Banachräume $\boldsymbol{I}_{p'}(F, E'')$ und $\boldsymbol{N}_p^Q(E, F)'$ miteinander identifiziert werden.

Beweis. Auf Grund von Satz 18 gibt es zu jeder p'-integralen Abbildung S eine Zerlegung

$$F \xrightarrow{P} L_\infty(V^0, \mu) \xrightarrow{I} L_{p'}(V^0, \mu) \xrightarrow{Q} E''$$

mit $\|P\| \leqslant 1$ und $\|Q\| \leqslant 1$, so daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $\iota_{p'}(I) \leqslant \iota_{p'}(S) + \varepsilon$ besteht. Da der Banachraum $L_\infty(V^0, \mu)$ sowohl die Fortsetzungseigenschaft als auch die metrische Approximationseigenschaft besitzt, gilt nach Satz 38 für jede Abbildung $T \in \boldsymbol{L}_0(E, F)$ die Identität $\nu_p(PT) = \nu_p^Q(PT)$, so daß wegen der Sätze 40 und 52 die Abschätzung

$$|\operatorname{Spur}(ST)| = |\operatorname{Spur}(QIPT)| \leqslant \iota_{p'}^{Q}(QI)\,\nu_p(PT) \leqslant [\iota_{p'}(S) + \varepsilon]\,\nu_p^Q(T)$$

besteht. Damit ist die Ungleichung

$$|\operatorname{Spur}(ST)| \leqslant \iota_{p'}(S)\,\nu_p^Q(T)$$

bewiesen, und man erkennt, daß durch die Zuordnung $T \to \operatorname{Spur}(ST)$ auf dem nach Satz 26 dichten linearen Teilraum $\boldsymbol{L}_0(E, F)$ von $\boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$ eine beschränkte Linearform S definiert wird, die sich in eindeutiger Weise auf den ganzen Raum $\boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$ fortsetzen läßt.

Wir zeigen nun, daß sich jede beschränkte Linearform $S \in \boldsymbol{N}_p^Q(E, F)'$ mit der Norm $\nu_p^Q(S)'$ in der Form $\langle T, S\rangle = \operatorname{Spur}(ST)$ darstellen läßt, so daß für die Abbildung $S \in \boldsymbol{I}_{p'}(F, E'')$ die Identität $\iota_{p'}(S) = \nu_p^Q(S)'$ besteht. Dabei können wir die Abbildung S genau so wie im Beweis des vorangehenden Satzes durch die Beziehung $\langle a \otimes y, S\rangle = \langle Sy, a\rangle$ definieren. Da für jede ausgeartete Abbildung

$$Tx = \sum_1^n \langle x, a_i\rangle y_i$$

die Identität

$$\operatorname{Spur}(ST) = \sum_1^n \langle Sy_i, a_i\rangle = \sum_1^n \langle a_i \otimes y_i, S\rangle = \langle T, S\rangle$$

gilt, stimmt die Zuordnung $T \to \operatorname{Spur}(ST)$ auf $\boldsymbol{L}_0(E, F)$ und somit nach Satz 26 auch auf ganz $\boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$ mit der vorgegebenen Linearform S überein.

Wir müssen nun noch beweisen, daß S eine p'-integrale Abbildung mit $\iota_{p'}(S) = \nu_p^Q(S)'$ ist. Zu diesem Zweck betten wir den Banachraum F durch die Abbildung $Py = \langle y, \cdot\rangle$ isometrisch in den Banachraum $B(V^0)$ ein. Weil dann die Identität $\nu_p^Q(T) = \nu_p^Q(PT) = \nu_p(PT)$ besteht, wird der Banachraum $\boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$ durch die Zuordnung $T \to PT$ isometrisch in den Banachraum $\boldsymbol{N}_p(E, B(V^0))$ abgebildet. Deshalb gibt es nach dem Hahn-Banach-Theorem auf $\boldsymbol{N}_p(E, B(V^0))$ eine beschränkte Linearform $\hat{S}$ mit $\langle PT, \hat{S}\rangle = \langle T, S\rangle$ für $T \in \boldsymbol{N}_p^Q(E, F)$ und $\nu_p(\hat{S})' = \nu_p^Q(S)'$. Diese Linearform läßt sich nach dem vorangehenden Satz mit einer Abbildung $\hat{S} \in \boldsymbol{I}_{p'}^Q(B(V^0), E'')$ in der Form $\langle PT, \hat{S}\rangle = \operatorname{Spur}(\hat{S}PT)$ darstellen. Dabei gilt die Identität $\iota_{p'}^Q(\hat{S}) = \nu_p(\hat{S})'$.

Nach den Darstellungssätzen [7] von I. M. Gelfand oder S. Kakutani und Satz 46 ist aber $\hat{S}$ sogar eine p'-integrale Abbildung mit $\iota_{p'}(\hat{S}) = \iota_{p'}^Q(\hat{S})$. Da sich aus der Gleichung $\langle Sy, a\rangle = \langle a \otimes y, S\rangle = \langle a \otimes Py, \hat{S}\rangle = \langle \hat{S}Py, a\rangle$ die Aussage $S = \hat{S}P$ ergibt, ist S eine p'-integrale Abbildung mit

$$\iota_{p'}(S) \leqslant \nu_p^Q(S)'.$$

In der letzten Ungleichung muß jedoch sogar das Gleichheitszeichen gelten, denn wir haben bereits gezeigt, daß die Norm der Linearform S nicht größer als $\iota_{p'}(S)$ sein kann.

9. ∞-nukleare und ∞-integrale Abbildungen. Bei dem Versuch, die im vorangehenden Abschnitt aufgestellten Dualitätstheoreme auch auf die Grenzfälle $p = 1$ und $p = \infty$ auszudehnen, stößt man fast zwangsläufig auf die folgenden Definitionen.

Eine lineare Abbildung T von einen Banachraum E in einen Banachraum F heißt *∞-nuklear*, wenn sie in der Form $Tx = \sum \langle x, a_i\rangle y_i$ dargestellt werden kann, so daß für die beschränkten Linearformen $a_i \in E'$ und die Elemente $y_i \in F$ die Aussagen

$$\lim_i \|a_i\| = 0 \quad \text{und} \quad \sup_{\|b\| \leqslant 1} \Big\{ \sum |\langle y_i, b\rangle| \Big\} < +\infty$$

[7] Vgl. [8] und [11]. Wenn man die Abbildung $\hat{S}$ auf $C(V^0)$ einschränkt, werden keine Darstellungssätze benötigt.

gelten. Setzt man

$$\boldsymbol{\nu}_\infty(T) = \inf\Big[\sup_i \|a_i\| \sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum |\langle y_i, b\rangle|\Big\}\Big],$$

wobei das Infimum über alle möglichen Darstellungen der Abbildung T gebildet wird, so bleiben sämtliche Sätze aus dem 1. Abschnitt gültig. Insbesondere ist eine Abbildung $T \in \boldsymbol{N}_\infty(E, F)$ dadurch charakterisiert, daß sie sich in der folgenden Art faktorisieren läßt:

$$E \xrightarrow{P} l_\infty \xrightarrow{D} c_0 \xrightarrow{Q} F.$$

Dabei sind P und Q beschränkte lineare Abbildungen mit $\|P\| \leqslant 1$ und $\|Q\| \leqslant 1$, während die Abbildung D durch eine Zuordnung der Form

$$\{\xi_i\} \xrightarrow{D} \{\delta_i \xi_i\} \quad \text{mit } \{\delta_i\} \in c_0$$

definiert wird. Zusätzlich kann erreicht werden, daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\sup_i |\delta_i| \leqslant \boldsymbol{\nu}_\infty(T) + \varepsilon$$

gilt.

Eine lineare Abbildung T von einemB anachraum E in einen Banachraum F heißt ∞-*integral*, wenn sie mit einem auf der schwach kompakten Einheitskugel U^0 des dualen Banachraumes E' definierten F-wertigen Maß M in der Form

$$Tx = \int_{U^0} \langle x, a\rangle\, dM(a)$$

dargestellt werden kann. Setzt man

$$\boldsymbol{\iota}_\infty(T) = \inf \|M\|,$$

wobei das Infimum über alle in den Darstellungen von T auftretenden F-wertigen Maße M gebildet wird, so bleiben die Sätze 11-14 des 3. Abschnittes gültig. Jede beschränkte lineare Abbildung von einem Banachraum $C(A)$ in einen beliebigen Banachraum F ist ∞-*integral*, und die Abbildungen $T \in \boldsymbol{I}_\infty(E, F)$ sind dadurch charakterisiert, daß sie sich in der Form

$$E \xrightarrow{P} C(A) \xrightarrow{Q} F$$

zerlegen lassen. Dabei sind P und Q beschränkte lineare Abbildungen mit $\|P\| \leqslant 1$ und $\|Q\| \leqslant \boldsymbol{\iota}_\infty(T) + \varepsilon$.

Die im 6. Abschnitt angegebenen Beziehungen zwischen p-nuklearen und p-integralen Abbildungen bleiben auch für den Fall $p = \infty$ erhalten.

LEMMA 11. *Wenn E' oder F die metrische Approximationseigenschaft besitzt, kann jede ausgeartete Abbildung $T \in \boldsymbol{L}_0(E, F)$ in der Form*

$$Tx = \sum_1^n \langle x, a_i\rangle y_i$$

dargestellt werden, so daß mit einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\sup_i \|a_i\| \cdot \sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^n |\langle y_i, b\rangle|\Big\} \leqslant \boldsymbol{\iota}_\infty(T) + \varepsilon$$

besteht.

Beweis. Wir setzen voraus, daß F die metrische Approximationseigenschaft bezitzt, und bestimmen zu der Abbildung T eine Zerlegung

$$E \xrightarrow{P} C(U^0) \xrightarrow{Q} F$$

mit $Px = \langle x, \cdot\rangle$ und $\|Q\| \leqslant \boldsymbol{\iota}_\infty(T) + \varepsilon/4$.

Wie im Fall $1 \leqslant p < +\infty$ läßt sich die Abbildung T in der Form

$$Tx = \sum_1^r \langle x, a_k\rangle y_k + Q_1 Px$$

schreiben, so daß die Ungleichungen

$$\|a_k\| \leqslant 1 \quad \text{und} \quad \sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_1^r |\langle y_k, b\rangle|\Big\} \leqslant \varepsilon/4$$

gelten. Dabei ist Q_1 eine ausgeartete Abbildung von $C(U^0)$ in F. Deshalb gibt es Maße $\mu_k \in C(U^0)'$ und Elemente $y_{r+k} \in F$ mit

$$\sup_{\|b\|\leqslant 1}\Big\{\sum_{k=1}^s |\langle y_{r+k}, b\rangle|\Big\} \leqslant \varepsilon/4,$$

für die die Identität

$$Q_1\varphi = \sum_{k=1}^s \langle \varphi, \mu_k\rangle y_{r+k}$$

besteht. Wird nun das Maß μ durch Normierung aus dem Maß $\sum_{k=1}^s |\mu_k|$ gewonnen, so existieren nach dem Satz von Lebesgue-Nikodym Funktionen $f_k \in \boldsymbol{L}_1(U^0, \mu)$ mit $\mu_k = f_k \mu$. Folglich besitzt die Abbildung Q_1 eine Darstellung

$$Q_1\varphi = \sum_{k=1}^s \Big[\int_{U^0} \varphi(a) f_k(a)\, d\mu(a)\Big] y_{r+k},$$

und man kann den Beweis wie im Fall $1 \leqslant p < +\infty$ zu Ende führen.

Eine lineare Abbildung T von einem Banachraum E in einen Banachraum F heißt *quasi-∞-nuklear*, wenn es eine Folge von Linearformen $a_i \in E'$ mit

$$\lim_i \|a_i\| = 0$$

gibt, so daß die Ungleichung

$$\|Tx\| \leqslant \sup_i |\langle x, a_i \rangle|$$

besteht. Setzt man

$$\boldsymbol{\nu}_\infty^Q(T) = \inf[\sup_i \|a_i\|],$$

wobei das Infimum über alle zulässigen Folgen $\{a_i\}$ gebildet wird, so gilt die Identität (8) $\boldsymbol{\nu}_\infty^Q(T) = \|T\|$, und wenn E' oder F die Approximationseigenschaft besitzt, hat man $\boldsymbol{N}_\infty^Q(E, F) = \boldsymbol{K}(E, F)$.

Werden schließlich alle beschränkten linearen Abbildungen als *quasi-∞-integral* bezeichnet, und setzt man $\boldsymbol{\iota}_\infty^Q(T) = \|T\|$, so bleiben sämtliche Aussagen der Abschnitte 5 und 6 bis auf die Sätze 32 und 33 erhalten.

Für den Fall, daß E' oder F die Approximationseigenschaft besitzt, hat bereits A. Grothendieck [4] die Isomorphien $\boldsymbol{N}_1(E, F)' = \boldsymbol{L}(F, E'')$ und $\boldsymbol{K}(E, F)' = \boldsymbol{I}_1(F, E'')$ bewiesen. Die beiden fehlenden Aussagen $\boldsymbol{N}_\infty(E, F)' = \boldsymbol{I}_1^Q(F, E'')$ und $\boldsymbol{N}_1^Q(E, F)' = \boldsymbol{I}_\infty(F, E'')$ ergeben sich durch Übertragung der Beweise für die Sätze 52 und 53. Dabei muß man beachten, daß für jede Abbildung $S \in \boldsymbol{I}_\infty(F, E'')$ eine Zerlegung der Form

$$F \xrightarrow{P} C(U^0)'' \xrightarrow{Q} E''$$

mit $\|P\| \leqslant 1$ und $\|Q\| \leqslant \iota_\infty(T) + \varepsilon$ existiert, wobei der Banachraum $C(U^0)''$ die Fortsetzungseigenschaft besitzt.

10. Abbildungen in Hilberträumen. Eine beschränkte lineare Abbildung T von einem Hilbertraum H_1 in einen Hilbertraum H_2 wird als *Hilbert-Schmidt-Abbildung* (vgl. [3], [16] oder [20]) bezeichnet, wenn für ein vollständiges Orthonormalsystem $\{e_i\}_{i \in I}$ von H_1 die Ungleichung

$$\sum_I \|Te_i\|^2 < +\infty$$

besteht. Die Gesamtheit $\boldsymbol{S}(H_1, H_2)$ aller derartigen Abbildungen ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt (9)

$$(S, T) = \sum_I (Se_i, Te_i)$$

(8) Diese Identität ist die Verallgemeinerung von Satz 43 auf den Fall $p = \infty$.
(9) Das Skalarprodukt ist von der speziellen Wahl des vollständigen Orthonormalsystems unabhängig.

und der Norm

$$\boldsymbol{\sigma}(T) = \Big\{\sum_I \|Te_i\|^2\Big\}^{1/2}.$$

Jede Hilbert-Schmidt-Abbildung $T \in \boldsymbol{S}(H_1, H_2)$ kann mit zwei Orthonormalsystemen $\{e_i\}$ und $\{f_i\}$ in der Form $Tx = \sum \lambda_i (x, e_i) f_i$ dargestellt werden. Dabei gilt die Identität $\boldsymbol{\sigma}(T) = \{\sum |\lambda_i|^2\}^{1/2}$. Da man durch die Ansätze $Px = \{\lambda_i(x, e_i)\}$ und $Q\{\eta_i\} = \sum \eta_i f_i$ zwei Abbildungen $P \in \boldsymbol{L}(H_1, l_2)$ und $Q \in \boldsymbol{L}(l_2, H_2)$ mit $\|P\| = \boldsymbol{\sigma}(T)$ und $\|Q\| = 1$ erhält, ergibt sich für T die Produktdarstellung $T = QI_1^2 P$. Dabei ist I_1^2 die identische Abbildung von l_1 in l_2, die wir im folgenden genauer untersuchen wollen.

Nach [13], [14], [16] oder [23] gilt

Satz 54. *Die identische Abbildung von l_1 in l_2 ist quasi-1-integral* (10).

Man kann sich leicht überlegen, daß die Abbildung I_1^2 nicht 1-integral ist. Dagegen erhalten wir

Satz 55. *Die identische Abbildung von l_1 in l_2 ist p-integral für $p > 1$.*

Beweis. Mit den Rademacherschen Funktionen $\varrho_1(t), \varrho_2(t), \ldots$ wird durch den Ansatz

$$P\{\xi_i\} = \sum_1^\infty \xi_i \varrho_i(t)$$

eine beschränkte lineare Abbildung P von l_1 in $L_\infty[0, 1]$ definiert. Setzt man andererseits

$$Qf = \Big\{\int_0^1 f(t)\varrho_i(t)\,dt\Big\},$$

so ergibt sich nach [7], 7.1.5, eine beschränkte lineare Abbildung Q von $L_p[0, 1]$ in l_2. Deshalb ist $I_1^2 = QIP$ nach Satz 17 eine p-integrale Abbildung.

Wir formulieren nun das Hauptergebnis dieses Abschnittes.

Satz 56. *Für zwei Hilberträume H_1 und H_2 gelten folgende Aussagen:*

(1) $\boldsymbol{N}_p^Q(H_1, H_2) = \boldsymbol{I}_p^Q(H_1, H_2) = \boldsymbol{S}(H_1, H_2)$ *für* $1 \leqslant p < +\infty$;

(2) $\boldsymbol{N}_p(H_1, H_2) = \boldsymbol{I}_p(H_1, H_2) = \boldsymbol{S}(H_1, H_2)$ *für* $1 < p \leqslant +\infty$;

(3) $\boldsymbol{N}_\infty^Q(H_1, H_2) = \boldsymbol{K}(H_1, H_2)$ *und* $\boldsymbol{I}_\infty^Q(H_1, H_2) = \boldsymbol{L}(H_1, H_2)$;

(4) $\boldsymbol{N}_1(H_1, H_2) = \boldsymbol{I}_1(H_1, H_2)$.

Beweis. Unter Verwendung von Satz 54 und der Tatsache, daß sich jede Abbildung $T \in \boldsymbol{S}(H_1, H_2)$ in der Form $T = QI_1^2 P$ schreiben läßt, wurde in [14] gezeigt, daß die Hilbert-Schmidt-Abbildungen mit den quasi-1-integralen Abbildungen zusammenfallen: $\boldsymbol{I}_1^Q(H_1, H_2) = \boldsymbol{S}(H_1, H_2)$.

(10) Der genaue Wert der Norm $\boldsymbol{\iota}_1^Q(I_1^2)$ konnte bis jetzt noch nicht ermittelt werden. Vermutlich gilt $\boldsymbol{\iota}_1^Q(I_1^2) = \sqrt{2}$.

Da sich die Hilbert-Schmidt-Abbildungen in der σ-Norm durch ausgeartete Abbildungen approximieren lassen, gilt nach Satz 44 sogar die Aussage $\mathbf{N}_1^Q(H_1, H_2) = \mathbf{S}(H_1, H_2)$. Durch Dualisierung erhalten wir nach Abschnitt 9 die Beziehung $\mathbf{I}_\infty(H_1, H_2) = \mathbf{S}(H_1, H_2)$. Folglich sind alle p-integralen Abbildungen vom Hilbert-Schmidtschen Typus. Andererseits folgt für $p > 1$ aus Satz 55 und der Darstellung $T = QI_1^2P$, daß alle Hilbert-Schmidt-Abbildungen p-integral sind:

$$\mathbf{I}_p(H_1, H_2) = \mathbf{S}(H_1, H_2) \quad \text{für } 1 < p \leqslant +\infty.$$

Deshalb gilt nach Satz 36 auch

$$\mathbf{N}_p(H_1, H_2) = \mathbf{S}(H_1, H_2) \quad \text{für } 1 < p \leqslant +\infty.$$

Durch Dualisierung dieser Gleichung erhalten wir nach Satz 52 die Beziehung

$$\mathbf{I}_p^Q(H_1, H_2) = \mathbf{S}(H_1, H_2) \quad \text{für } 1 \leqslant p < +\infty,$$

die von Pełczyński [12] bereits auf direktem Wege beweisen wurde. Folglich gilt auch

$$\mathbf{N}_p^Q(H_1, H_2) = \mathbf{S}(H_1, H_2) \quad \text{für } 1 \leqslant p < +\infty.$$

Die unter (3) zusammengestellten Identitäten wurden bereits im 9 Abschnitt erläutert, und die Aussage $\mathbf{N}_1(H_1, H_2) = \mathbf{I}_1(H_1, H_2)$ folgt unmittelbar aus Satz 51.

Aus dem Beweis des vorangehenden Satzes ergibt sich, daß die Normen

$$\boldsymbol{\nu}_p^Q = \boldsymbol{\iota}_p^Q \text{ für } 1 \leqslant p < +\infty \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\nu}_p = \boldsymbol{\iota}_p \text{ für } 1 < p \leqslant +\infty$$

auf $\mathbf{S}(E, F)$ zu der Norm $\boldsymbol{\sigma}$ äquivalent sind. So besteht zum Beispiel die Ungleichung $\boldsymbol{\sigma}(T) \leqslant \boldsymbol{\iota}_1^Q(T) \leqslant \varrho\boldsymbol{\sigma}(T)$. Dabei ist $\sqrt{\pi/2}$ nach Grothendieck [6], § 3, Theorem 6, der kleinstmögliche Wert für die Konstante ϱ. Lediglich im Fall $p = 2$ besteht die Identität (vgl. [18]) $\boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\iota}_2 = \boldsymbol{\nu}_2^Q = \boldsymbol{\iota}_2^Q = \boldsymbol{\sigma}$.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 56 erhält man die bereits von Grothendieck [6] bewiesene Aussage, daß jede Abbildung $T \in \mathbf{L}(E, F)$, die sich als Produkt

$$H_1 \xrightarrow{P} C(A) \xrightarrow{Q} H_2$$

schreiben läßt, vom Hilbert-Schmidtschen Typus ist. Durch Übergang zu den dualen Abbildungen ergibt sich die entsprechende Aussage für Abbildungen, die in der Form

$$H_1 \xrightarrow{P} L_1(A, \mu) \xrightarrow{Q} H_2$$

faktorisiert werden können. Dabei gilt die Ungleichung $\boldsymbol{\sigma}(T) \leqslant \varrho\|P\|\,\|Q\|$.

Satz 57. *Alle 2-integralen Abbildungen T von einem Hilbertraum H in einen beliebigen Banachraum F sind quasi-1-integral, und mit einer Konstanten ϱ gilt die Ungleichung $\boldsymbol{\iota}_1^Q(T) \leqslant \varrho\boldsymbol{\iota}_2(T)$.*

Beweis. Wir betrachten eine Zerlegung der 2-integralen Abbildung T

$$H \xrightarrow{P} C(U^0) \xrightarrow{I} L_2(U^0, \mu) \xrightarrow{Q} F,$$

so daß mit einer positiven Zahl ε die Aussagen $\|P\| \leqslant 1$, $\|Q\| \leqslant 1$ und $\boldsymbol{\iota}_2(I) \leqslant \boldsymbol{\iota}_2(T) + \varepsilon$ bestehen. Dann ist die 2-integrale Abbildung IP nach Satz 56 quasi-1-integral, und es gilt mit einer Konstanten ϱ die Abschätzung (11)

$$\boldsymbol{\iota}_1^Q(T) \leqslant \boldsymbol{\iota}_1^Q(IP) \leqslant \varrho\boldsymbol{\iota}_2(IP) \leqslant \varrho[\boldsymbol{\iota}_2(T) + \varepsilon].$$

Als unmittelbare Folgerung aus den Sätzen 36, 44 und 57 ergibt sich

Satz 58. *Alle 2-nuklearen Abbildungen T von einem Hilbertraum H in einen beliebigen Banachraum F sind quasi-1-nuklear, und mit einer Konstanten ϱ gilt die Ungleichung $\boldsymbol{\nu}_1^Q(T) \leqslant \varrho\boldsymbol{\nu}_2(T)$.*

Durch Dualisierung von Satz 58 erhalten wir nach Abschnitt 9

Satz 59. *Alle ∞-integralen Abbildungen T von einem beliebigen Banachraum E in einen Hilbertraum H sind quasi-2-integral* (12), *und mit einer Konstanten ϱ gilt die Ungleichung $\boldsymbol{\iota}_2^Q(T) \leqslant \varrho\boldsymbol{\iota}_\infty(T)$.*

Als unmittelbare Folgerung aus den Sätzen 36, 44 und 59 ergibt sich

Satz 60. *Alle ∞-nuklearen Abbildungen T von einem beliebigen Banachraum E in einen Hilbertraum H sind quasi-2-nuklear* (13), *und mit einer Konstanten ϱ gilt die Ungleichung $\boldsymbol{\nu}_2^Q(T) \leqslant \varrho\boldsymbol{\nu}_\infty(T)$.*

Als Spezialfall von Satz 59 erhält man die Aussage, daß alle beschränkten linearen Abbildungen von $C(A)$ in einen Hilbertraum H quasi-2-integral sind.

Da für jedes endliche System von Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ aus $L_1(A, \mu)$ durch den Ansatz

$$P\{\xi_i\} = \sum_1^n \xi_i f_i$$

eine beschränkte lineare Abbildung P von l_2^n in $L_1(A, \mu)$ mit

$$\|P\| = \sup_{\|g\|_{L_\infty} \leqslant 1} \Big\{\sum_1^n |\langle f_i, g\rangle|^2\Big\}^{1/2}$$

(11) Der kleinst mögliche Wert für die Konstante ϱ ist bis jetzt noch nicht bekannt.

(12) Alle quasi-2-integralen Abbildungen sind sogar 2-integral.

(13) Alle quasi-2-nuklearen Abbildungen sind sogar 2-nuklear.

definiert wird, gilt für jede Abbildung $T \in \boldsymbol{L}(L_1(A, \mu), H)$ die Ungleichung

$$\Big\{\sum_1^n \|Tf_i\|^2\Big\}^{1/2} = \boldsymbol{\sigma}(TP) \leqslant \varrho \|T\| \sup_{\|g\|_\infty \leqslant 1} \Big\{\sum_1^n |\langle f_i, g\rangle|^2\Big\}^{1/2}.$$

Deshalb sind auch alle beschränkten linearen Abbildungen von $L_1(A, \mu)$ in einen Hilbertraum quasi-2-integral (14).

Als letzte Folgerung erhalten wir die ebenfalls auf Grothendieck [6] zurückgehende Aussage, daß für zwei Hilberträume H_1 und H_2 und zwei Banachräume E und F vom Typ $C(A)$ oder $L_1(A, \mu)$ alle Produktabbildungen der Form

$$E \longrightarrow H_1 \longrightarrow F \longrightarrow H_2$$

und

$$H_1 \longrightarrow E \longrightarrow H_2 \longrightarrow F$$

nuklear sind.

11. Schwach singuläre Integralabbildungen. Ist G eine beschränkte offene Teilmenge des n-dimensionalen euklidischen Raumes, so ergibt sich

SATZ 61. *Unter den Voraussetzungen*

$$p > \frac{n}{n-r} \quad \textit{und} \quad 0 < r < n$$

wird für jeden stetigen Kern $\tau \in C(\bar{G} \times \bar{G})$ durch die Zuordnung

$$\varphi(a) \xrightarrow{T} \psi(b) = \int_G \varphi(a) \frac{\tau(a, b)}{|a-b|^r} da$$

eine p-nukleare Abbildung T von $C(\bar{G})$ in sich definiert, und es gilt

$$\boldsymbol{\nu}_p(T) \leqslant a(G, r, p)\|\tau\|.$$

Beweis. Aus der Ungleichung

$$\|\psi\| \leqslant \|\tau\| \sup_{b \in G} \Big\{\int_G \frac{1}{|a-b|^{rp'}} da\Big\}^{1/p'} \Big\{\int_G |\varphi(a)|^p da\Big\}^{1/p}$$

folgt nach Satz 45, daß T eine p-integrale Abbildung mit $\boldsymbol{\iota}_p(T) \leqslant a(G, r, p)\|\tau\|$ ist.

Wir betrachten nun für jede positive Zahl ε die stetige Funktion ϱ_ε mit

$$\varrho_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon/2, \\ \text{linear} & \text{für} \quad \varepsilon/2 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ 1 & \text{für} \quad \varepsilon \leqslant t \leqslant +\infty \end{cases}$$

und setzen

$$\tau_\varepsilon(a, b) = \varrho_\varepsilon(|a-b|)\tau(a, b).$$

Nun folgt aus Ergebnissen von Grothendieck [5] und Satz 4, daß die modifizierte Abbildung

$$\varphi(a) \xrightarrow{T_\varepsilon} \psi_\varepsilon(b) = \int_G \varphi(a) \frac{\tau_\varepsilon(a, b)}{|a-b|^r} da$$

p-nuklear ist, weil sie durch einen stetigen Kern erzeugt wird. Da für eine beliebige Zahl s mit $p > n/(n-s)$ und $r < s < n$ die Abschätzung $\boldsymbol{\iota}_p(T - T_\varepsilon) \leqslant a(G, s, p)\|\tau\|\varepsilon^{s-r}$ gilt, hat man

$$\boldsymbol{\iota}_p\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon = T.$$

Deshalb folgt aus den Sätzen 2 und 35, daß die Abbildungen T_ε ein gerichtetes $\boldsymbol{\nu}_p$-Cauchy-System bilden, dessen p-nuklearer Limes mit T übereinstimmt.

(14) In [6] wird sogar bewiesen, daß alle beschränkten linearen Abbildungen von $L_1(A, \mu)$ in einen Hilbertraum quasi-1-integral sind. Vgl. auch [9].

Literaturnachweis

[1] N. Bourbaki, *Intégration vectorielle*, Paris 1959.

[2] S. Chevet, *Sur certains produits tensoriels topologiques d'espaces de Banach*, p. 43 (Université de Clermont, Fac. Sci.); C. R. Acad. Sc. Paris 266 (1968), S. 413-415.

[3] I. Z. Gochberg und M. G. Krein, *Einführung in die Theorie der linearen nichtselbstadjungierten Operatoren*, Moskau 1965 (russisch).

[4] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[5] — *La théorie de Fredholm*, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), S. 419-484.

[6] — *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Boletim Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956), S. 1-79.

[7] S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa — Lwów 1935.

[8] J. L. Kelley and I. Namioka, *Linear topological spaces*, Princeton 1963.

[9] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications*, Studia Math. 29 (1968), S. 275-326.

[10] L. Nachbin, *Some problems in extending and lifting continuous linear transformations*, Proc. Inter. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem 1961, S. 340-350.

[11] M. A. Neumark, *Normierte Algebren*, Berlin 1959.

[12] A. Pełczyński, *A Characterization of Hilbert-Schmidt operators*, Studia Math. 28 (1967), S. 355-360.

[13] — et W. Szlenk, *Sur l'injection naturelle de l'espace (l) dans l'espace (l_p)*, Coll. Math. 10 (1963), S. 313-323.

[14] A. Pietsch, *Absolut summierende Abbildungen in lokalkonvexen Räumen*, Math. Nachr. 27 (1963), S. 77-103.

[15] — *Quasinukleare Abbildungen in normierten Räumen*, Math. Ann. 165 (1966), S. 76-90.

[16] — *Nukleare lokalkonvexen Räumen*, Berlin 1965.

[17] — *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math. 28 (1967), S. 333-353.

[18] — *Hilbert-Schmidt Abbildungen in Banachräumen*, Math. Nachr. 37 (1968), S. 237-245.

[19] P. Saphar, *Applications à puissance nucléaire et applications de Hilbert-Schmidt dans les espaces de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris 261 (1965), S. 867-870, und Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 3 série, 83 (1966). S. 113-151.

[20] R. Schatten, *A theory of cross-spaces*, Princeton 1950.

[21] — *Norm ideals of completely continuous operators*, Berlin — Göttingen — Heidelberg 1960.

[22] L. Schwartz, *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications*, Séminaire, Paris 1953/54.

[23] M. de Wilde, *Espaces de fonctions à valeurs dans un espace linéaire à semi-normes*, Mém. Soc. Roy. Sci. Liège 18 (1966).

[24] P. Saphar, *Produits tensoriels topologiques et classes d'applications linéaires*, C. R. Acad. Sc. Paris 266 (1968), S. 526-528.

[25] — *Comparaison de normes sur des produits tensoriels d'espaces de Banach. Applications*, ibidem 266 (1968), S. 809-811.

Reçu par la Rédaction le 17. 4. 1968

STUDIA MATHEMATICA, T. XXXIII. (1969)

p-integral operators commuting with group representations and examples of quasi-p-integral operators which are not p-integral

by

A. PEŁCZYŃSKI (Warszawa)

In this note we substantiate a conjecture of Persson and Pietsch (cf. [5], remark after Satz 46) that for each $p \geqslant 1$ there exists a quasi p-integral operator (resp. quasi p-nuclear operator) which is not p-integral (resp. p-nuclear). The case $p = 1$ is well known; as an example it is enough to consider in a Hilbert space any operator of a Hilbert-Schmidt type which is not nuclear. The examples for $p > 1$ will be constructed in the present note exploiting the fact that a p-integral operator which commutes with representations of a compact group G has a "G-invariant factorization".

1. Preliminaries. The capital letters X, Y and Z will stand for Banach spaces. An *operator* means bounded linear operator. $C(K)$-denotes the space of continuous complex-valued functions on a compact Hausdorff space K. A *measure* on K means a non-negative Borel measure on K with bounded total variation. If m is a measure on K, then $L_p(m, K)$ denotes the space of complex-valued functions f on K such that $m(|f|^p) < \infty$. We use the notation $m(f) = \int_K f dm$.

We recall the basic definitions from [5].

Let $1 \leqslant p < \infty$. An operator $v: C(K) \to Y$ is called *p-majorable* if there is a measure m on K such that

$$\|vf\|^p \leqslant m(|f|^p) \quad \text{for } f \in C(K). \tag{1.1}$$

An operator $u: X \to Y$ is called *p-integral* if there exists an isometrically isomorphic embedding $J: X \to C(K)$ and a p-majorable operator $v: C(K) \to Y$ such that $u = vJ$.

An operator $u: X \to Y$ is called *quasi p-integral* if there is an isometrically isomorphic embedding $I: Y \to Z$ such that Iu is a p-integral operator.