

Karie me to Mianovskiege ta probjecie.

st. Stefan Banach Inf. U. J. K

Luver du. 20. VII. 1931.

# À Madame Lucie Banach

## PRÉFACE

La théorie des opérations, créée par V. Volterra, a pour objet l'étude des fonctions définies dans les espaces à une infinité de dimensions. Dans plusieurs domaines très importants des mathématiques cette théorie a pénétré d'une façon essentielle: il suffit de rappeler que la théorie des équations intégrales et le calcul des variations se sont trouvés contenus comme des cas particuliers dans les principales sections de la théorie générale des opérations, On voit dans cette théorie les méthodes de mathématique classique s'unir aux méthodes modernes d'une manière parfaitement harmonieuse et remarquablement efficace. Elle permet souvent d'interpréter les théorèmes de la théorie des ensembles ou de la topologie d'une façon tout à fait imprévue. Ainsi p. ex. le théorème topologique sur le point invariant se laisse traduire moyennant la théorie des opérations (comme l'ont montré MM. Birkhoff et Kellogg) dans le théorème classique sur l'existence des solutions des équations différentielles. Il y a des parties importantes des mathématiques dont la connaissance vraiement approfondie n'est possible qu'à l'aide de la théorie des opérations. Telles sont aujourd'hui: la théorie des fonctions de variable réelle, équations intégrales, calcul des variations, etc.

Cette théorie mérite donc avec raison, aussi bien par sa valeur esthétique que par la portée de ses raisonnements (même abstraction faite de ses nombreuses applications) l'intérêt de plus en plus croissant que lui prêtent les mathématiciens. Aussi on ne s'étonnera pas à l'opinion de M. J. Hadamard, qui considère la théorie des opérations comme une des plus puissantes méthodes de recherche de la mathématique contemporaine.

Le livre présent contient la première partie de l'algèbre des opérations. Il est consacré à l'étude des opérations dites *linéaires*, qui correspond à celle des formes linéaires  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$  de l'algèbre.

La notion d'opération linéaire peut être définie comme suit. Soient E et  $E_1$  deux espaces formés d'éléments quelconques, mais où une addition associative et l'élément-zéro sont supposés définis. Soit y = U(x) une fonction (opération, transformation) qui fait correspondre à tout élément x de E un élément y de  $E_1$  (dans le cas où  $E_1$  est en particulier l'espace des nombres réels, cette fonction porte aussi le nom de fonctionnelle). Si, quels

Préface

que soient  $x_1$  et  $x_2$  de E, on a  $U(x_1+x_2)=U(x_1)+U(x_2)$ , l'opération U(x) s'appelle additive. Si, en outre, E et  $E_1$  sont des espaces métriques, c.-à.-d. que dans chacun d'eux la distance des éléments est définie, on peut considérer des opérations U(x) continues. Or, les opérations à la fois additives et continues s'appellent linéaires.

Dans ce livre, je me suis proposé de recueillir surtout les résultats concernant les opérations linéaires définies dans certains espaces généraux, notamment dans les ainsi dits espaces du type (B), dont des cas particuliers sont: l'espace des fonctions continues, celui des fonctions à p-ième puissance sommable, l'espace de Hilbert, etc.

Je donne aussi l'interprétation des théorèmes généraux dans diverses disciplines mathématiques, à savoir dans la théorie des groupes, des équations différentielles, des équations intégrales, des équations à une infinité d'inconnues, des fonctions de variable réelle, des méthodes de sommations, des séries orthogonales, etc. Il est intéressant de voir certains théorèmes donner des résultats même dans des disciplines assez éloignées les unes des autres. Ainsi p. ex. le théorème sur l'extension (prolongement) d'une fonctionnelle additive résout simultanément le problème général de la mesure, le problème des moments et celui de l'existence des solutions d'un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

A côté des méthodes algébriques, ce sont surtout celles de la théorie générale des ensembles qui passent dans ce livre au premier plan, en gagnant à cette théorie plusieurs applications nouvelles. On trouvera aussi dans divers chapitres de ce livre de nouveaux théorèmes généraux. Tels sont, en particulier, les deux derniers chapitres et l'annexe: les résultats qui'ils renferment n'ont été nulle part publiés. Ils constituent une ébauche de l'étude des invariants relatifs aux transformations linéaires (des espaces du type (B)). En particulier, le Chapitre XII contient la définition et l'analyse des propriétés de la dimension linéaire, qui joue dans ces espaces un rôle analogue à celui de la dimension au sens ordinaire dans les espaces euclidiens.

Les résultats et les problèmes qui, faute de place, n'ont pas été envisagés, sont discutés brièvement dans les Remarques à la fin du livre. On y trouvera aussi quelques indications bibliographiques supplémentaires. D'une façon générale (excepté l'Introduction) je n'indique pas l'origine des théorèmes que je crois trop simples ou bien démontrés ici pour la première fois.

Un certain nombre d'ouvrages plus récents a paru et continue à paraître dans le périodique *Studia Mathematica*, qui poursuit le but de grouper avant tout les recherches concernant l'analyse fonctionnelle et ses applications.

Je me propose de consacrer un second livre (qui constituera la suite de l'ouvrage présent) à la théorie des autres opérations fonctionnelles avec un large emploi des méthodes topologiques.

En terminant, je tiens à témoigner ici mon affectueuse reconnaissance à tous ceux qui ont bien voulu m'aider dans mon travail, en se chargeant de la traduction de mon manuscrit polonais, ou concourir à ma tâche par leurs précieux conseils. Je remercie tout particulièrement M. H. Auerbach pour sa collaboration à la rédaction de l'Introduction et M. S. Mazur pour le concours général qu'il m'a prêté et pour sa part à la rédaction des Remarques finales.

Lwów, Juillet 1932

Stefan Banach



#### INTRODUCTION

# A. L'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

Nous admettons que le lecteur connaît la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue (1).

# § 1. Quelques théorèmes de la théorie de l'intégrale de Lebesgue (2)

Si les fonctions mesurables  $x_n(t)$  sont bornées dans leur ensemble et la suite  $\{x_n(t)\}$  converge presque partout dans un intervalle fermé [a, b] vers la fonction x(t), on a

(1) 
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt.$$

Plus généralement, s'il existe une fonction sommable  $\varphi(t) \ge 0$  telle que  $|x_n(t)| \le \varphi(t)$  pour n = 1, 2, ..., la fonction limite est également sommable et satisfait à l'égalité (1).

Si les fonctions  $x_n(t)$  sont sommables dans [a, b] et forment une suite non décroissante, convergente vers la fonction x(t), on a l'égalité (1), lorsque la fonction x(t) est sommable, et

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt = +\infty$$

dans le cas contraire.

<sup>(1)</sup> Cf. p. ex. C. de la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire, Gauthier-Villars, Paris 1916, ou H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, 2-me édition, Gauthier-Villars, Paris 1928.

<sup>(2)</sup> Cf. p. ex. C. de la Vallée Poussin, l. c., p. 49.

Introduction. A. L'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

25

dont la première donne pour p = 2 l'inégalité connue de Schwarz:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_{i} b_{i}\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i}^{2}\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_{i}^{2}\right)^{1/2}.$$

Pour toute fonction x(t) à p-ième  $(p \ge 1)$  puissance sommable et pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une fonction continue  $\varphi(t)$  telle que

$$\int_{a}^{b} |x - \varphi|^{p} < \varepsilon (^{1}).$$

## § 3. La convergence asymptotique

La suite  $\{x_n(t)\}\$  de fonctions mesurables dans un certain ensemble est dite asymptotiquement convergente (ou convergente en mesure) vers la fonction x(t) définie dans cet ensemble, lorsqu'on a pour tout  $\varepsilon > 0$ 

$$\lim_{n\to\infty} m \mathop{\rm E}_t (|x_n(t)-x(t)|>\varepsilon)=0 \ (^2).$$

Une suite  $\{x_n(t)\}$  asymptotiquement convergente vers la fonction x(t)contient toujours une suite partielle convergente (dans le sens ordinaire) presque partout vers cette fonction.

Pour qu'une suite  $\{x_n(t)\}$  soit asymptotiquement convergente, il faut et il suffit que l'on ait pour tout  $\varepsilon > 0$ 

$$\lim_{i,k\to\infty} m \mathop{\mathbb{E}}_{i}(|x_{i}(t)-x_{k}(t)|>\varepsilon)=0 \ (^{3}).$$

# § 4. La convergence en moyenne

Etant donnée une suite  $\{x_n(t)\}\$  de fonctions à p-ième puissance sommable  $(p \ge 1)$  dans [a, b], on dit que cette suite y est à p-ième puissance convergente en moyenne vers la fonction x(t) à p-ième puissance sommable, lorsque

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|x_n(t)-x(t)|^p\,dt=0.$$

(3) Cf. p. ex. E. W. Hobson, l. c., vol. II, p. 242-244.

Si la suite  $\{x_n(t)\}$  de fonctions à p-ième puissance sommable  $(p \ge 1)$ converge presque partout vers la fonction x(t) et si

$$\int_{a}^{b} |x_n(t)|^p dt < K \quad \text{pour tout } n = 1, 2, ...,$$

la fonction x(t) est également à p-ième puissance sommable (1).

# § 2. Quelques inégalités pour les fonctions à p-ième puissance sommable (2)

La classe des fonctions à p-ième (p > 1) puissance sommable dans [a, b]sera désignée par  $(L^{(p)})$ . Au nombre p on fait correspondre le nombre q lié avec p par l'équation 1/p+1/q=1 et portant le nom d'exposant conjugué avec p. Pour p = 2 on a donc également q = 2.

Si  $x(t) \subset (L^{(p)})$  et  $y(t) \subset (L^{(q)})$ , la fonction  $x(t) \cdot y(t)$  est sommable et son intégrale remplit l'inégalité

$$\left|\int_a^b x y dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |x|^p dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |y|^q dt\right)^{1/q}.$$

En particulier, on a donc pour p = 2:

$$\left|\int_{a}^{b} x y dt\right| \leq \left(\int_{a}^{b} x^{2} dt\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{a}^{b} y^{2} dt\right)^{1/2}.$$

Si les fonctions x(t) et y(t) appartiennent à  $(L^{(p)})$ , il en est de même de la fonction x(t) + y(t) et on a:

$$\left(\int_{a}^{b}|x+y|^{p}dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_{a}^{b}|x|^{p}dt\right)^{1/p} + \left(\int_{a}^{b}|y|^{p}dt\right)^{1/p}.$$

A ces inégalités correspondent les inégalités arithmétiques suivantes:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_{i} b_{i}\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i}|^{p}\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_{i}|^{q}\right)^{1/q},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i}+b_{i}|^{p}\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i}|^{p}\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_{i}|^{p}\right)^{1/p},$$

<sup>(1)</sup> Cf. p. ex. E. W. Hobson, l. c., vol. II, p. 250.

<sup>(2)</sup> mE désigne la mesure de l'ensemble E; le symbole E() désigne d'une façon générale l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles se présente la propriété mise en ().

<sup>(1)</sup> Cf. E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, vol. I, 2. éd., Cambridge 1921/26, p. 300.

<sup>(2)</sup> Cf. E. W. Hobson, l. c., vol. I, p. 588.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle fonction x(t) existe, est que l'on ait

$$\lim_{i,k\to\infty}\int_a^b|x_i(t)-x_k(t)|^p\,dt=0.$$

La fonction x(t) est alors définie dans [a, b] d'une façon univoque, sauf dans un ensemble de mesure nulle.

Une suite de fonctions qui converge en moyenne vers une fonction x(t) est aussi asymptotiquement convergente vers cette fonction ( $^{t}$ ) et contient par conséquent ( $\S$  3) une suite partielle qui converge (dans le sens ordinaire) presque partout vers la même fonction.

## § 5. L'intégrale de Stieltjes (2)

Soient x(t) une fonction continue et  $\alpha(t)$  une fonction à variation bornée dans [a, b]. En subdivisant l'intervalle [a, b] en intervalles partiels à l'aide des nombres

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

et choisissant dans chacun de ces intervalles partiels un nombre arbitraire  $\theta_i$ , nous pouvons, par analogie avec la définition de l'intégrale de Riemann, former la somme

$$S = \sum_{i=1}^{n} x(\theta_i) \left[ \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right] \quad \text{où} \quad t_i \geqslant \theta_i \geqslant t_{i-1}.$$

On démontre que pour toute suite de subdivisions, pourvu que leur intervalle partiel le plus grand tende vers 0, les sommes S ont une limite commune à toutes suites pareilles; cette limite est désignée par

$$\int_{a}^{b} x(t) d\alpha(t)$$

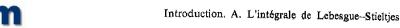
et dite intégrale de Stieltjes.

Cette intégrale a les propriétés suivantes:

$$\int_{a}^{b} x(t) d\alpha(t) = -\int_{b}^{a} x(t) d\alpha(t),$$

$$\int_{a}^{b} x(t) d\alpha(t) + \int_{b}^{c} x(t) d\alpha(t) = \int_{a}^{c} x(t) d\alpha(t),$$

$$\int_{a}^{b} [x_{1}(t) + x_{2}(t)] d\alpha(t) = \int_{a}^{b} x_{1}(t) d\alpha(t) + \int_{a}^{b} x_{2}(t) d\alpha(t).$$



Le premier théorème sur la valeur moyenne s'exprime ici par l'inégalité

$$\left|\int_{a}^{b}x(t)\,d\alpha(t)\right|\leqslant MV,$$

où M désigne la borne supérieure de la valeur absolue |x(t)| et V la variation totale de la fonction  $\alpha(t)$  dans [a, b].

Si la fonction  $\alpha(t)$  est absolument continue, on peut exprimer l'intégrale de Stieltjes par celle de Lebesgue comme il suit:

$$\int_{a}^{b} x(t) d\alpha(t) = \int_{a}^{b} x(t) \alpha'(t) dt,$$

Si  $\alpha(t)$  est une fonction croissante (c.-à-d. que l'on a toujours  $\alpha(t') < \alpha(t'')$  pour  $a \le t' < t'' \le b$ ) et si l'on pose pour tout nombre s de l'intervalle  $[\alpha(a), \alpha(b)]$ 

$$\beta(s) = \text{borne sup } \mathbf{E}(s \ge \alpha(t)),$$

on obtient:

(2) 
$$\int_{a}^{b} x(t) d\alpha(t) = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x \left[\beta(s)\right] ds (1).$$

Démonstration. Nous avons par définition de  $\beta(s)$ :

(3) 
$$\beta [\alpha(t)] = t \quad \text{pour} \quad a \leq t \leq b.$$

La fonction  $\beta(s)$  étant par hypothèse croissante et admettant comme valeurs tous les nombres de l'intervalle [a, b] où, d'après (3),  $a = \beta[\alpha(a)]$  et  $b = \beta[\alpha(b)]$ , elle est une fonction continue. Il en résulte que la fonction  $x[\beta(s)]$  est également continue.

Considérons une subdivision ( $\delta$ ) de [a, b] donnée par les nombres  $a = t_0 < t_1 < ...$  ...  $< t_n = b$  et posons  $\alpha(t_i) = \theta_i$  pour i = 1, 2, ..., n. Nous avons

$$I_{i} = \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_{i}} x [\beta(s)] ds = (\theta_{i} - \theta_{i-1}) x (\theta_{i}'),$$

où  $\vartheta_i' = \beta(s_i')$  et  $\vartheta_{i-1} \le \vartheta_i' \le \vartheta_i$ . Evidemment  $\beta(\vartheta_{i-1}) \le \beta(s_i') = \vartheta_i' \le \beta(\vartheta_i)$ . En vertu de (3) on a  $\beta(\vartheta_{i-1}) = \beta[\alpha(t_{i-1})] = t_{i-1}$  et d'une façon analogue  $\beta(\vartheta_i) = t_i$ . Par conséquent

$$t_{i-1} \leq \vartheta_i' \leq t_i$$

done

$$I_i = x(\theta_i) \left[ \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \right],$$

ďoù

(4) 
$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x \left[\beta(s)\right] ds = \sum_{i=1}^{n} I_{i} = \sum_{i=1}^{n} x(\theta_{i}) \left[\alpha(t_{i}) - \alpha(t_{i-1})\right].$$

<sup>(1)</sup> Cf. p. ex. E. W. Hobson, l. c., vol. II, p. 245.

<sup>(2)</sup> Cf. p. ex. H. Lebesgue, l. c., Chapitre XI.

<sup>(1)</sup> Cf. H. Lebesgue, I. c., p. 258-260.

Introduction. A. L'intégrale de Lebesgue-Stielties

Or, cette dernière somme tendant vers  $\int_{a}^{b} x(t) d\alpha(t)$ , lorsque la longueur maximum des intervalles de la subdivision  $(\delta)$  tend vers 0, l'égalité (4) donne l'égalité (3), q. f. d.

Ceci établi, si l'on admet que  $\alpha(t)$  est une fonction quelconque à variation bornée, on peut la représenter toujours comme une différence  $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$  où les fonctions  $\alpha_1(t)$  et  $\alpha_2(t)$  sont croissantes; en désignant comme auparavant par  $\beta_1(s)$  et  $\beta_2(s)$  les fonctions correspondantes, nous obtenons

$$\int_{a}^{b} x(t) d\alpha(t) = \int_{a}^{b} x(t) d\alpha_{1}(t) - \int_{a}^{b} x(t) d\alpha_{2}(t) = \int_{\alpha_{1}(a)}^{\alpha_{1}(b)} x \left[\beta_{1}(s)\right] ds - \int_{\alpha_{2}(a)}^{\alpha_{2}(b)} x \left[\beta_{2}(s)\right] ds.$$

Si les fonctions  $x_n(t)$  sont continues et bornées dans leur ensemble et la suite  $\{x_n(t)\}$  converge partout vers une fonction continue x(t), on a pour toute fonction  $\alpha(t)$  à variation bornée

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,d\alpha(t)=\int_a^b x(t)\,d\alpha(t)\,,$$

car

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)}x_n\left[\beta_1(s)\right]ds = \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)}x\left[\beta_1(s)\right]ds$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)}x_n\left[\beta_2(s)\right]ds = \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)}x_n\left[\beta_2(s)\right]ds.$$

# § 6. Le théorème de Lebesgue

Notons encore le théorème suivant.

Pour qu'une suite de fonctions sommables  $\{x_n(t)\}$  où  $0 \le t \le 1$  remplisse l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\alpha(t)\,x_n(t)\,dt\,=\,0$$

pour toute fonction  $\alpha(t)$  mesurable et bornée dans [0,1], il faut et il suffit que les trois conditions suivantes se trouvent simultanément satisfaites:

1° la suite 
$$\left\{\int_{0}^{1} |x_{n}(t)| dt\right\}$$
 est bornée,

2° pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $\eta > 0$  tel que tout sous-ensemble H de

[0,1] de mesure  $<\eta$  donne lieu à l'inégalité  $\left|\int\limits_H x_n(t)dt\right| \le \varepsilon$ , quel que soit n=1,2,...,

$$3^{\circ} \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{u} x_{n}(t) dt = 0 \text{ pour tout } 0 \leqslant u \leqslant 1 (1).$$

Nous connaîtrons dans la suite d'autres théorèmes de ce genre.

# B. Ensembles et opérations mesurables (B) dans les espaces métriques

## § 7. Espaces métriques

Etant donné un ensemble non vide E, on dit qu'il constitue un espace métrique ou espace (D), lorsqu'à tout couple ordonné x, y de ses éléments correspond un nombre (x, y) satisfaisant aux conditions  $(^2)$ :

- 1) (x, x) = 0, (x, y) > 0 lorsque  $x \neq y$ ,
- 2) (x, y) = (y, x),
- 3)  $(x, z) \leq (x, y) + (y, z)$ .

Le nombre (x, y) s'appelle distance des points (des éléments) x, y. Une suite de points  $\{x_n\}$  est dite convergente (3), lorsque

$$\lim_{p,q \to \infty} (x_p, x_q) = 0;$$

on l'appelle convergente vers le point  $x_0$  (ce qu'on écrit  $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ), lorsque

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,x_0)=0.$$

Le point  $x_0$  porte alors le nom de limite (ou de point-limite) de la suite  $\{x_n\}$ .

Il est facile de voir que la relation (6) entraı̂ne (5), car on a toujours

$$(x_p, x_q) \leq (x_p, x_0) + (x_q, x_0).$$

Par conséquent, une suite convergente vers un point est par cela-même une suite convergente; bien entendu, la réciproque n'est pas toujours vraie.

L'espace (D) à propriété que toute suite convergente y converge vers un certain point est dit complet.

<sup>(1)</sup> H. Lebesgue, Annales de Toulouse 1909.

<sup>(2)</sup> Les trois conditions 1)-3) peuvent être remplacées par les deux suivantes: 1\*) (x, y) = 0 équivaut à x = y, 2\*)  $(x, z) \le (x, y) + (z, y)$ . Cf. A. Lindenbaum, Sur les espaces métriques, Fundamenta Mathematicae 8 (1926) [p. 209-222], p. 211.

<sup>(3)</sup> Les suites convergentes dans notre sens sont appelées d'habitude "suites satisfaisant à la condition de Cauchy", c.-à-d. précisément à la condition (5).

L'espace (D) tel que toute suite infinie de ses points contient une suite convergente vers un point s'appelle compact.

Les espaces euclidiens constituent autant d'exemples des espaces (D) complets. Nous en allons énumérer ici une série d'autres exemples importants.

1. Soit (S) l'ensemble des fonctions mesurables dans l'intervalle [0,1]. Faisons correspondre à tout couple ordonné x, y d'éléments de cet ensemble (1) le nombre

$$(x, y) = \int_{0}^{1} \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt.$$

On vérifie facilement que les conditions 1)-3), énoncées plus haut pour la distance, se trouvent remplies. En effet, quant aux conditions 1) et 2), c'est évident (nous ne distinguons pas entre les fonctions qui ne différent que sur un ensemble de mesure nulle) et pour se convaincre que la condition 3) est également réalisée, il suffit de remarquer que l'on a pour tout couple de nombres arbitraires a, b:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Ansi "métrisé", l'ensemble (S) forme donc un espace (D); cet espace est complet, car la convergence d'une suite  $\{x_n\}$  de ses points (vers un point  $x_0$ ) s'y ramène à la convergence en mesure de la suite des fonctions  $\{x_n(t)\}$  (vers la fonction  $x_0(t)$  dans [0, 1]).

2. Soit (s) l'ensemble de toutes les suites de nombres. Posons pour tout couple ordonné x, y de ses éléments (2):

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}.$$

L'ensemble (s) forme alors un espace (D) complet. En effet, la convergence d'une suite de points  $\{x_m\}$ , resp. sa convergence vers un point  $x_0$ , y signifie (en posant  $x_m = \{\xi_n^{(m)}\}$  et  $x_0 = \{\xi_n\}$ ) que pour tout n naturel chacune des suites  $\{\xi_n^{(m)}\}$  est convergente, resp. converge vers  $\xi_n$ , à mesure que m tend vers l'infini.

3. Soit (M) l'ensemble des fonctions mesurables et bornées dans [0, 1]. Si l'on pose pour tout couple x, y de ses éléments

$$(x, y) = \text{vrai } \max_{0 \le t \le 1} \text{imum } |x(t) - y(t)|,$$

on en obtient un espace (D) complet. La convergence d'une suite de points  $\{x_n\}$  (vers un point  $x_0$ ) s'y traduit par la convergence uniforme presque partout dans [0, 1] de la suite des fonctions  $\{x_n(t)\}$  (vers la fonction  $x_0(t)$ ).

4. Soit (m) l'ensemble des suites bornées de nombres. En posant

$$(x, y) = \text{borne } \sup_{1 \le n < \infty} |\xi_n - \eta_n|,$$

on obtient d'une façon évidente de (m) un espace (D) complet.

5. Soit (C) l'ensemble des fonctions continues dans [0, 1]. Posons pour tout couple x, y de ses éléments

$$(x, y) = \max_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|.$$

L'ensemble (C) forme alors un espace (D) complet; la convergence d'une suite de ses points  $\{x_n\}$  (vers un point  $x_0$ ) se ramène à la convergence uniforme dans [0, 1] de la suite des fonctions  $\{x_n(t)\}$  (vers la fonction  $x_0(t)$ ).

- 6. Soit (c) l'ensemble des suites convergentes de nombres. En définissant pour tout couple x, y de ses éléments leur distance (x, y) tout comme nous l'avons fait dans l'ensemble (m), on voit facilement que l'ensemble (c) forme également un espace (D) complet.
- 7. Soit  $(C^{(p)})$  l'ensemble des fonctions à p-ième dérivée continue dans [0, 1]. En posant

$$(x, y) = \max_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)| + \max_{0 \le t \le 1} |x^{(p)}(t) - y^{(p)}(t)|,$$

nous en obtenons un espace (D) complet. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de points  $\{x_n\}$  y soit convergente (vers un point  $x_0$ ) est que la suite des fonctions  $\{x_n(t)\}$ , de même que celle des fonctions  $\{x_n^{(p)}(t)\}$ , convergent uniformément dans [0, 1] (la première vers la fonction  $x_0(t)$  et la seconde vers la fonction  $x_0(t)$ ).

8. Soit  $(L^{(p)})$  où  $p \ge 1$  l'ensemble des fonctions à p-ième puissance sommable dans [0,1]. En posant

$$(x, y) = \left[\int_{0}^{1} |x(t)-y(t)|^{p}\right]^{1/p},$$

nous voyons que l'ensemble  $(L^{(p)})$  devient un espace (D) complet. Pour qu'une suite  $\{x_n\}$  de ses points soit convergente (vers le point  $x_0$ ), il faut et il suffit que la suite des fonctions  $\{x_n(t)\}$  soit dans [0,1] à p-ième puissance convergente en moyenne (vers la fonction  $x_0(t)$ ).

<sup>(1)</sup> Nous posons: x = x(t) et y = y(t), resp.  $x_n = x_n(t)$  et  $x_0 = x_0(t)$ , dans tous les exemples ou x et y, resp.  $x_n$  et  $x_0$ , sont des éléments d'un ensemble de fonctions.

<sup>(2)</sup> Nous posons  $x = \{\xi_n\}$  et  $y = \{\eta_n\}$  dans tous les exemples des espaces de suites.

9. Soit  $(l^{(p)})$  où  $p \ge 1$  l'ensemble des suites de nombres tels que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \text{ est convergente. En posant pour les éléments } x, y \text{ de } (l^{(p)})$ 

$$(x, y) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p\right]^{1/p},$$

on en obtient un espace (D) complet.

10. L'ensemble des fonctions analytiques f(z) uniformément continues dans le cercle  $|z| \le 1$  forme un espace (D) complet, lorsqu'on définit la distance de deux fonctions f(z) et  $\varphi(z)$  comme

$$\max_{|z| \leq 1} |f(z) - \varphi(z)|.$$

Il est à remarquer que l'on peut définir les ensembles des fonctions à n variables correspondant aux exemples 3, 5, 7 et 8.

## § 8. Ensembles dans les espaces métriques

Soient E un espace (D) quelconque et G un ensemble arbitraire d'éléments (de points) de E.

Un point  $x_0$  est dit point d'accumulation de l'ensemble G, lorsqu'il existe une suite de points  $\{x_n\}$  telle que  $x_0 \neq x_n \subset G$  pour tout n et que  $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ . L'ensemble de tous les points d'accumulation de G s'appelle son ensemble dérivé et on le désigne par G'. L'ensemble

$$\bar{G} = G + G'$$

porte le nom de fermeture de l'ensemble G; l'ensemble G s'appelle fermé, lorsque  $G' \subset G$  et il s'appelle parfait, lorsque G' = G. On dit d'un ensemble G qu'il est ouvert, lorsque son complémentaire (c.-à-d. l'ensemble E-G) est un ensemble fermé. Tout ensemble ouvert s'appelle aussi entourage (ou voisinage) de chacun de ses points.

Etant donné un point  $x_0 \subset E$  et un nombre  $r_0 > 0$ , l'ensemble de tous les points x tels que  $(x, x_0) \leq r_0$  s'appelle une sphère et celui des x tels que  $(x, x_0) < r_0$  s'appelle une sphère ouverte; le point  $x_0$  est dit centre et le nombre  $r_0$  rayon de cette sphère, resp. de cette sphère ouverte. On dit d'un ensemble G, qu'il est dense, lorsque  $\bar{G} = E$  et qu'il est non dense, lorsque  $\bar{G}$  ne contient aucune sphère.

L'espace E est dit séparable, lorsqu'il contient un ensemble dense dénombrable. Il est facile de voir que tout espace métrique compact (c.-à-d. dont toute suite infinie de points contient une suite convergente; cf. p. 29) est séparable.

Un ensemble G est dit de I-e catégorie, lorsqu'il est une somme dénombrable d'ensembles non denses; dans le cas contraire il est dit de II-e catégorie. Un ensemble G est de I-e catégorie dans un point  $x_0$ ,

lorsqu'il existe un entourage V de  $x_0$  tel que l'ensemble G V est de I-e catégorie; si tous les entourages du point  $x_0$  sont dépourvus de cette propriété, on dit que l'ensemble G est de II-e catégorie au point  $x_0$ .

On peut démontrer le suivant

Théorème 1. Si un ensemble G situé dans un espace métrique quelconque E est de II-e catégorie, il existe dans E une sphère K telle que l'ensemble G est de II-e catégorie en tout point de  $G \cdot K$  (1).

Admettons à présent que E soit un espace (D) complet. Nous allons démontrer le

LEMME. Etant donnée dans E une suite  $\{K_n\}$  de sphères de rayons  $r_n$  telles que  $K_{n+1} \subset K_n$  pour tout n=1,2,... et  $\lim_{n\to\infty} r_n=0$ , il existe un point commun à toutes ces sphères.

Démonstration. Soit  $x_n$  le centre de la sphère  $K_n$ . On a par hypothèse pour p < q naturels  $x_q \subset K_q \subset K_p$ , d'où

$$(7) (x_p, x_q) \leqslant r_p.$$

Il en résulte que la suite de points  $\{x_n\}$  est convergente. En posant (l'espace E étant complet)  $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ , on a pour p < q selon (7)  $(x_p, x_0) \le (x_0, x_q) + (x_q, x_0) \le r_p + (x_q, x_0)$ , d'où  $(x_p, x_0) \le r_p$ . Or, p étant arbitraire, le point  $x_0$  appartient à toutes les sphères  $K_n$ , c.q.f.d.

Une simple conséquence de ce lemme est le

Théorème 2. Tout espace métrique et complet E est de II-e catégorie. Démonstration. Supposons par contre que

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} G_n,$$

où chacun des ensembles  $G_n$  est non dense. Il existe par conséquent une suite de sphères  $\{K_n\}$  de rayons  $\{r_n\}$  à propriétés suivantes:

$$K_1 \cdot G_1 = 0, r_1 < 1$$
 et  $K_{n+1} \subset K_n, K_{n+1} \cdot G_{n+1} = 0, r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ .

En vertu du lemme, il existe donc un point  $x_0$  qui appartient à toutes ces sphères. Or, comme  $K_n \cdot G_n = 0$  pour tout n = 1, 2, ..., ce point ne peut appartenir à aucun  $G_n$ , contrairement à (8).

Soit maintenant E un espace (D) quelconque et  $E^*$  un ensemble arbitraire de points de E. Si l'on conserve pour les éléments de  $E^*$  la même définition de la distance que celle adoptée dans l'espace E, on obtient de  $E^*$  également un certain espace (D).

<sup>(1)</sup> Pour la démonstration voir S. Banach [31] [cette édition, vol. I, p. 204-206].

<sup>3 -</sup> Oeuvres t. II

Considérons un ensemble  $G \subset E^*$ . S'il est p. ex. non dense, lorsqu'on l'envisage dans l'espace  $E^*$ , on dit qu'il est non dense par rapport à (l'ensemble)  $E^*$ ; ce n'est que dans le cas où  $E^* = E$  que nous omettons d'habitude les mots "par rapport à (l'ensemble)  $E^*$ ". On fait de même, lorsqu'il s'agit des autres définitions qui ont été introduites au début de ce §.

Le théorème 1 implique que si l'ensemble G est de I-e catégorie dans tous ses points par rapport à  $E^*$ , il est de I-e catégorie par rapport à  $E^*$ . D'une façon analogue, le théorème 2 implique que l'espace métrique E est complet et l'ensemble  $E^*$  est fermé, cet ensemble est de II-e catégorie par rapport à lui-même.

Considérons dans un espace (D) arbitraire E la plus petite classe K d'ensembles de cet espace satisfaisant aux conditions suivantes:

- 1) tout ensemble sermé appartient à K,
- 2) toute somme dénombrable d'ensembles appartenant à K appartient à K,
- 3) tout complément d'un ensemble appartenant à K appartient à K.

Les ensembles de la classe K s'appellent "ensembles mesurables (B)". On dit d'un ensemble G qu'il remplit la condition de Baire, lorsque tout ensemble parfait  $P \neq 0$  contient un point  $x_0$  tel qu'au moins un des ensembles:  $P \cdot G$  et P - G est de I-e catégorie dans le point  $x_0$  par rapport à P.

On a le

Théorème 3. Tout ensemble mesurable (B) remplit la condition de Baire (1).

# § 9. Opérations dans les espaces métriques

Soient E et  $E_1$  des ensembles non vides arbitraires. Si l'on fait correspondre à tout élément  $x \subset E$  un certain élément de  $E_1$  on dit qu'une opération est définie dans l'ensemble E. L'élément correspondant à x s'appelle valeur de cette opération en x; l'ensemble E porte le nom de domaine et l'ensemble des valeurs celui de contredomaine de l'opération considérée. Dans le cas particulier où les valeurs de l'opération donnée sont des nombres, on l'appelle d'habitude une fonctionnelle.

Ceci dit, admettons que l'ensemble E constitue un espace (D) et soit U(x) une opération ayant E pour domaine et un certain espace (D) pour contredomaine. L'opération U(x) s'appelle continue au point  $x_0$ , lorsque, pour toute suite de points  $\{x_n\}$  convergente vers le point  $x_0$ , on a  $\lim_{n\to\infty} U(x_n)$ 

 $=U(x_0)$ ; l'opération U(x) s'appelle continue dans E, lorsqu'elle l'est en tout point de cet espace. Etant donnée une suite d'opérations  $\{U_n(x)\}$  et une opération  $U_0(x)$  définies dans E et les contredomaines de toutes ces opérations faisant partie d'un même espace (D), on dit que cette suite d'opérations est convergente au point  $x_0$  vers l'opération  $U_0(x)$ , lorsque la suite

des valeurs  $U_n(x_0)$  converge vers  $U_0(x_0)$ ; la suite d'opérations  $\{U_n(x)\}$  est convergente dans E vers l'opération  $U_0(x)$ , lorsqu'elle l'est en tout point de E. Si la suite d'opérations  $\{U_n(x)\}$  est convergente dans E vers l'opération  $U_0(x)$ , cette dernière opération s'appelle limite de  $\{U_n(x)\}$  dans E. Au lieu de dire "opération continue dans E", on dit plus court "opération continue", lorsqu'il est entendu de quel espace il s'agit; on fait de même pour les autres termes.

Soit K la plus petite classe d'opérations (ayant pour domaine commun un espace (D) donné E et pour contredomaines respectifs des ensembles situés également dans un certain espace (D) qui satisfait aux conditions:

- 1) toute opération continue appartient à K,
- 2) toute limite d'une suite convergente d'opérations qui appartiennent à K appartient à K.

Les opérations de cette classe portent le nom d', opérations mesurables (B)".

On dit d'une opération U(x) à domaine E et à contredomaine étant également un espace (D) qu'elle remplit la condition de Baire, lorsque dans tout ensemble parfait non vide  $P \subset E$  il existe un ensemble G de I-e catégorie par rapport à P et tel que l'opération U(x), considérée dans l'espace P-G, est continue dans cet espace.

On a le

Théorème 4. Toute opération mesurable (B) remplit la condition de Baire (1). On peut démontrer également le

Théorème 5. Si l'opération U(x) définie dans l'espace E y est une limite d'opérations continues, il existe dans E un ensemble G de I-e catégorie tel que l'opération U(x) est continue en chaque point de l'ensemble E-G.

Le théorème suivant établit une relation entre les ensembles mesurables (B) et les opérations mesurables (B); soient E l'espace (D) où elles sont définies et  $E_1$  l'espace qui contient leurs valeurs.

Théorème 6. L'opération U(x) étant mesurable (B), pour tout ensemble  $G_1 \subseteq E_1$  mesurable (B) l'ensemble G des points x tels que  $U(x) \subseteq G_1$  est mesurable (B)(<sup>2</sup>).

Théorème 7. Si les espaces E et  $E_1$  sont séparables et l'opération U(x) est continue dans E, alors les images des ensembles  $G \subset E$  mesurables (B) remplissent la condition de Baire. Si, en outre,  $x \neq x'$  entraı̂ne toujours  $U(x) \neq U(x')$ , les images des ensembles mesurables (B) sont aussi mesurables (B).

La première partie du théorème résulte du fait que l'image continue d'un ensemble mesurable (B) est toujours un ensemble ainsi dit "analyti-

<sup>(1)</sup> Pour la démonstration cf. S. Banach, l. c., p. 398 [cette édition, vol. I, p. 206].

<sup>(1)</sup> Pour la démonstration cf. S. Banach, l.c., p. 397 [cette édition, vol. I, p. 206].

<sup>(2)</sup> F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin und Leipzig 1927, p. 195, II.

que" (1) et que tout ensemble analytique remplit la condition de Baire (2). La démonstration de la deuxième partie du théorème se trouve aussi dans le livre de F. Hausdorff (3).

Théorème 8. Si les opérations U'(x) et U''(x) sont mesurables (B), la fonctionnelle (U'(x), U''(x)) l'est également.

La démonstration résulte du fait que si les opérations U'(x) et U''(x) sont continues, la fonctionnelle (U'(x), U''(x)) est aussi continue et que pour tout point  $y_0 \subset E_1$  la fonctionnelle  $(y, y_0) = (y_0, y)$  est continue dans  $E_1$ .

THÉORÈME 9.  $\{U_n(x)\}$  étant une suite d'opérations mesurables (B), l'ensemble des points où cette suite est convergente est un ensemble mesurable (B).

Démonstration. Soit pour p,q et r naturels  $G_{p,q,r}$  l'ensemble des points x tels que  $(U_p(x), U_q(x)) \le 1/r$ . En vertu des théorèmes 6 et 8 les ensembles  $G_{p,q,r}$  sont mesurables (B). Or, on a  $G = \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{q=p}^{\infty} G_{p,q,r}$ , donc G est mesurable (B).

THEORÈME 10.  $\{U_n'(x)\}$  et  $\{U_n''(x)\}$  étant des suites d'opérations mesurables (B), si pour tout  $x \subset E$  on a  $\lim_{n \to \infty} \left(U_n'(x), U_n''(x)\right) < \infty$ , la fonctionnelle  $\lim_{n \to \infty} \left(U_n'(x), U_n''(x)\right)$  est mesurable (B).

Démonstration. Posons pour tout couple de nombres naturels p, q et pour tout point x:

$$F_{p,q}(x) = \max_{p \le n \le p+q-1} (U'_n(x), U''_n(x)).$$

On a évidemment pour tout x:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} (U'_n(x), U''_n(x)) = \lim_{p\to\infty} \lim_{q\to\infty} F_{p,q}(x).$$

Il suffit donc de montrer que chacune des fonctionnelles  $F_{p,q}(x)$  est mesurable (B). Or, d'après le théorème 8, chacune des fonctionnelles  $F_{p,1}(x)' = (U'_p(x), U''_p(x))$  est mesurable (B) et comme on a pour tout q > 1:

$$2F_{p,q+1}(x) = F_{p,q}(x) + F_{p+q,1}(x) + |F_{p,q}(x) - F_{p+q,1}(x)|,$$

on en conclut par induction, en appliquant encore le théorème 8, que toutes les fonctionnelles  $F_{p,q}(x)$  sont mesurables (B).

Théorème 11. Etant donnée une suite de fonctionnelles continues et non-négatives  $\{F_n(x)\}$  telles que l'on a  $\overline{\lim_{n\to\infty}}F_n(x)<\infty$  pour tout élément x d'un

ensemble  $G \subset E$  de II-e catégorie, il existe une sphère  $K \subset E$  et un nombre N tel que  $F_n(x) \leq N$  pour tout  $x \subset K$  et pour tout n = 1, 2, ...

Démonstration. Les ensembles  $G_i$  des points x tels que  $F_n(x) \leq i$  pour n=1,2,... sont évidemment fermés et on a  $G \subset \sum_{i=1}^{\infty} G_i$ ; il existe donc un indice N tel que  $G_N$  est de II-e catégorie. Comme ensemble fermé, il contient par conséquent une sphère K en question.

<sup>(1)</sup> Cf. p. ex. F. Hausdorff, l.c., p. 179, 208 et 209, II.

<sup>(2)</sup> Cf. O. Nikodym, Sur une propriété de l'opération A, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), p. 149-154; la démonstration pour les espaces euclidiens, qui s'y trouve, s'applique facilement au cas général, lorsqu'on tient compte du théorème précité sur les ensembles de I-e catégorie (S. Banach, l.c., p. 395 [cette édition, vol. I, p. 204]).

<sup>(3)</sup> Cf. F. Hausdorff, I, c., p. 208, II.



#### CHAPITRE I

## Groupes

#### § 1. Définition des espaces du type (G)

Etant donné un espace (D) complet E, admettons qu'à tout couple ordonné d'éléments x, y de l'espace E vienne correspondre d'une façon univoque un élément z de cet espace appelé somme de x et y et que nous désignerons par le symbole x+y.

Admettons en outre que E soit un groupe par rapport à cette somme, c'est-à-dire que:

$$I_1$$
.  $(x+y)+z = x+(y+z)$ ,

I<sub>2</sub>. il existe dans E un élément-zéro Θ tel que l'on a

$$\Theta + x = x + \Theta = x$$
 pour tout  $x \subset E$ ,

 $I_3$ . à tout élément x de E correspond un élément (que nous désignerons par -x) et qui satisfait à l'équation

$$x+(-x)=\Theta$$
.

Il résulte facilement de ces axiomes que:

- a) il n'existe dans E qu'un seul élément-zéro Θ,
- b) on  $a(-x)+x = \Theta$  pour tout  $x \subset E$ ,
- c) x+y=x+z entraı̂ne y=z.

Admettons encore que les axiomes suivants soient remplis:

II<sub>1</sub>. 
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad entra \hat{i} n e \quad \lim_{n\to\infty} (-x_n) = -x,$$

II<sub>2</sub>. 
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$
 et  $\lim_{n\to\infty} y_n = y$  entraı̂nent  $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$ .

Les espaces (D) complets satisfaisant à ces axiomes seront nommés espaces du type (G).

Remarque. Nous écrirons x-y au lieu de x+(-y) et -x+y au lieu de (-x)+y.

Chapitre I. Groupes 39

## § 2. Propriétés des sous-groupes

Soit E un espace du type (G). Etant donné un élément  $x \subset E$  et un ensemble  $H \subset E$ , nous désignerons par xH, resp. par Hx, l'ensemble de tous les éléments  $y \subset E$  tels que y = x+z, resp. que y = z+x, où  $z \subset H$ .

Evidemment, on a toujours les identités

$$x(H_1 + H_2) = xH_1 + xH_2,$$
  

$$x(H_1 - H_2) = xH_1 - xH_2,$$
  

$$x(H_1 \cdot H_2) = (xH_1) \cdot (xH_2),$$

et les identités analogues pour  $H_1x$  et  $H_2x$ .

On montre facilement que, suivant que H est un ensemble fermé, ouvert, non dense, de I-e, resp. de II-e catégorie, ou mesurable (B), l'ensemble xH est également fermé, ouvert, non dense, etc. Si z est un point intérieur de H, x+z est un point intérieur de xH.

Un ensemble non vide  $H \subseteq E$  porte le nom de sous-groupe de E, lorsque les conditions  $x \subseteq H$  et  $y \subseteq H$  entraînent  $x+y \subseteq H$  et  $-x \subseteq H$ . On a alors évidemment aussi  $\Theta \subseteq H$ .

Un ensemble est dit *connexe*, lorsqu'il n'est pas somme de deux ensembles non vides disjoints et fermés dans lui. Si E est un ensemble connexe et H en est un sous-ensemble à la fois fermé et ouvert, on a H=E, car autrement l'ensemble E-H serait aussi non vide et fermé.

Théorème 1. Tout sous-groupe  $H \subset E$  qui est de II-e catégorie et remplit la condition de Baire, est à la fois fermé et ouvert dans E.

Démonstration. En vertu du théorème 1, p. 33, il existe une sphère ouverte K dans laquelle H est partout de II-e catégorie. On peut évidemment admettre que le centre  $y_0$  de K appartient à H. Comme H remplit la condition de Baire, l'ensemble K-H est de I-e catégorie. Or,  $y_0$  étant un point intérieur de K, le point  $\Theta = -y_0 + y_0$  est un point intérieur de  $(-y_0)K$ . Il existe donc une sphère ouverte  $K_1 \subset (-y_0)K$  de centre  $\Theta$ . On a  $(-y_0)[K-H] = (-y_0)K-(-y_0)H$  et comme  $(-y_0)H = H$ , puisque H est un sous-groupe, il vient  $(-y_0)[K-H] = (-y_0)K-H \supset K_1-H$ , de sorte que, K-H et par conséquent  $(-y_0)[K-H]$ , étant de I-e catégorie,  $K_1-H$  est aussi de I-e catégorie.

D'autre part, pour tout  $x \subseteq K_1$  on a  $x \subseteq xK_1$ , puisque  $\theta \subseteq K_1$  et  $x+\theta=x$ . Par conséquent  $K_1 \cdot xK_1 \neq 0$ . Il existe donc une sphère ouverte  $K_2 \subseteq K_1 \cdot xK_1$  de centre x. On a  $K_2 - H \subseteq K_1 - H$  et  $K_2 - xH \subseteq xK_1 - xH = x[K_1 - H]$ , de sorte que les ensembles  $K_2 - H$  et  $K_2 - xH$  sont également de I-e catégorie.

Il en résulte que  $H \cdot xH \neq 0$ ; il existe donc un y tel que  $y \subset H$  et  $y \subset xH$ , d'où  $-x+y \subset H$  et par conséquent, H étant un sous-groupe,  $-x = -x+y-y \subset H$ , donc  $x \subset H$ .

Il est ainsi démontré que  $K_1 \subset H$  et, par suite, que  $\Theta$  est un point

Chapitre I. Groupes

intérieur de H. Comme pour tout  $y \subset H$  on a yH = H et  $y = y + \Theta$ , chaque point y de H en est également un point intérieur. H est donc un ensemble ouvert.

Pour prouver qu'il est à la fois fermé, posons  $\lim_{n\to\infty} y_n = y$  où  $y_n \subset H$  pour tout n = 1, 2, ... Or, comme  $\lim_{n\to\infty} (y-y_n) = \Theta \subset K_1 \subset H$ , il existe un n tel que  $y-y_n \subset K_1 \subset H$ , d'où  $y = y-y_n+y_n \subset H$ , c.q.f.d.

Ce théorème implique le suivant

Théorème 2. L'espace E étant connexe, tout sous-groupe  $H \subseteq E$  qui est de II-e catégorie et remplit la condition de Baire est identique à E.

Remarque. Comme tout ensemble mesurable (B) remplit la condition de Baire, les théorèmes 1 et 2 subsistent en particulier, lorsque H est un ensemble mesurable (B).

#### § 3. Opérations additives et linéaires

Soient E et  $E_1$  des espaces du type (G) et U(x) une opération définie dans E et dont le contredomaine est situé dans  $E_1$ .

L'opération U(x) s'appelle additive, lorsque

$$U(x+y) = U(x) + U(y)$$
 pour tous  $x \subset E$  et  $y \subset E$ .

On a alors  $U(x) = U(x+\Theta) = U(x) + U(\Theta)$ , d'où

$$U(\Theta) = \Theta$$
,

et comme  $\Theta = U(\Theta) = U(x-x) = U(x) + U(-x)$ , on a

$$U(-x) = -U(x).$$

L'opération additive et continue s'appelle linéaire.

Théorème 3. Toute opération additive et continue dans un point est une opération linéaire.

Démonstration. Soit  $x_0$  un point de continuité de l'opération additive U(x). Soient  $x_n \subset E$ ,  $x \subset E$  et  $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ . On a  $\lim_{n \to \infty} (x_n - x + x_0) = x_0$ , d'où  $\lim_{n \to \infty} U(x_n - x + x_0) = U(x_0)$  et  $\lim_{n \to \infty} [U(x_n) - U(x) + U(x_0)] = U(x_0)$ , donc  $\lim_{n \to \infty} U(x_n) = U(x)$ , de sorte que l'opération en question est continue aussi dans le point x arbitraire, c.-à-d. qu'elle est linéaire.

Théorème 4. Toute opération additive mesurable (B) est une opération linéaire.

Démonstration. En vertu du théorème 4, p. 35, l'opération U(x) considérée remplit la condition de Baire. Elle est donc continue sur un certain ensemble H où E-H est de I-e catégorie. Soit  $\lim x_n = \Theta$ .

L'ensemble  $x_n[E-H] = E - x_n H$  étant pour tout n = 1, 2, ..., de I-e catégorie, il en est de même de l'ensemble

$$(E-H) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n [E-H] = E-H + \sum_{n=1}^{\infty} (E-x_n H) \supset E-H \cdot \prod_{n=1}^{\infty} x_n H,$$

qui par conséquent (en vertu du théorème 2, p. 33) n'épuise pas l'espace E. Il existe donc un point x tel que l'on a

$$x \subset H$$
 et  $x \subset x_n H$  pour tout  $n = 1, 2, ...,$ 

d'où  $(-x_n+x) \subset H$ , et comme  $\lim_{n\to\infty} (-x_n+x) = x$ , il vient  $\lim_{n\to\infty} U(-x_n+x) = U(x)$ , donc  $\lim_{n\to\infty} [U(-x_n)+U(x)] = U(x)$  et finalement  $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = \Theta$ . L'opération U(x) est donc continue au point  $\Theta$  de E et par conséquent elle est linéaire d'après le théorème 3 qui vient d'être démontré.

Remarque. Comme on le voit de la marche du raisonnement, le théorème reste vrai pour les opérations additives qui remplissent la condition de Baire.

Théorème 5. L'espace E étant connexe, si  $\{U_n(x)\}$  est une suite d'opérations linéaires, l'ensemble des points x pour lesquels il existe la limite  $\lim_{n\to\infty}U_n(x)$  est soit I-e catégorie, soit identique à E.

La démonstration résulte facilement du théorème 2, p. 33, l'ensemble des points x où la suite d'opérations  $\{U_n(x)\}$  est convergente étant selon le théorème 9, p. 36, mesurable (B), donc selon le théorème 3, p. 34, remplissant la condition de Baire et, en outre, tout ensemble des points de convergence constituant un groupe.

## § 4. Un théorème sur la condensation des singularités

Théorème 6. Etant donnés un espace E connexe et une suite double d'opérations linéaires  $\{U_{p,q}(x)\}$ , si pour une suite de points  $\{x_p\}$  la limite  $\lim_{q\to\infty} U_{p,q}(x_p)$  n'existe pour aucun p=1,2,..., alors l'ensemble H des points x tels que la limite  $\lim_{q\to\infty} U_{p,q}(x)$  n'existe pour aucun  $x \in H$  quel que soit p=1,2,..., est de H-e catégorie et son complément E-H est de H-e catégorie.

Démonstration. Soit pour tout  $p=1,2,...,H_p$  l'ensemble des points de convergence de la suite  $\{U_{p,q}(x)\}$ . On a  $H_p \neq E$ , puisque par hypothèse  $x_p \subset E-H_p$ . En vertu du théorème 5, p. 35, l'ensemble  $H_p$  est de I-e catégorie. Il en est donc de même de l'ensemble  $\sum_{p=1}^{\infty} H_p$ , ce qui achève la démonstration, car on a  $H=E-\sum_{p=1}^{\infty} H_p$ .

#### CHAPITRE II

# Espaces vectoriels généraux

## § 1. Définition et propriétés élémentaires des espaces vectoriels

Etant donné un ensemble non vide E, admettons qu'à tout couple ordonné x, y d'éléments de E vienne correspondre un élément x+y de E (dit somme de x et y) et que pour tout nombre t et pour tout  $x \subseteq E$  un élément tx de E (dit produit du nombre t par l'élément x) soit défini de façon que ces opérations, à savoir l'addition des éléments et la multiplication des nombres par les éléments remplissent les conditions suivantes (où x, y et z désignent des éléments arbitraires de E et a, b des nombres):

- 1) x + y = y + x,
- 2) x + (y + z) = (x + y) + z,
- 3) x+y=x+z entraı̂ne y=z,
- 4) a(x+y) = ax + ay,
- 5) (a+b)x = ax+bx,
- $6) \ a(bx) = (ab)x,$
- 7)  $1 \cdot x = x$ .

Dans ces hypothèses, nous disons que l'ensemble E constitue un espace vectoriel ou linéaire. Il est facile de voir qu'il existe alors un et un seul élément — désignons-le par  $\Theta$  — tel que l'on a toujours  $x+\Theta=x$  et que l'égalité ax=bx où  $x\neq \Theta$  donne a=b; de plus, que l'égalité ax=ay où  $a\neq 0$  implique x=y.

Posons, en outre, par définition:

$$-x = (-1)x$$
 et  $x-y = x+(-y)$ .

Les exemples 1-10 des espaces (D), décrits p. 30-32 sont à la fois autant d'exemples des espaces vectoriels, en y admettant les définitions habituelles de l'addition des éléments et de la multiplication des nombres par eux.



Chapitre II. Espaces vectoriels généraux

43

Lorsque  $x \neq y$ , nous entendons par le segment unissant x et y l'ensemble de tous les éléments de la forme tx+(1-t)y où t est un nombre quelconque de l'intervalle [0, 1].

Un ensemble  $G \subset E$  est dit *convexe*, lorsqu'il contient tout segment qui en unit les éléments arbitraires.

Si  $x_1, x_2, ..., x_n$  sont des éléments d'un espace vectoriel, l'expression

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i,$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$  sont des nombres réels arbitraires, s'appelle une *combinaison* linéaire des éléments  $x_1, x_2, ..., x_n$ .

#### § 2. Extension des fonctionnelles additives et homogènes

Soient E et  $E_1$  deux espaces vectoriels et f(x) une opération définie dans E et dont le contredomaine est situé dans  $E_1$ .

L'opération f(x) s'appelle additive, lorsqu'on a pour tout couple d'éléments x, y:

$$f(x+y) = f(x)+f(y);$$

elle est dite homogène, lorsqu'on a pour tout élément x et tout nombre t:

$$f(tx) = tf(x).$$

Théorème 1 (1). Etant données

1° une fonctionnelle p(x) définie dans E et telle que l'on ait pour tous x et y de E

$$p(x+y) \le p(x) + p(y)$$
 et  $p(tx) = tp(x)$  pour  $t \ge 0$ ,

 $2^{\circ}$  une fonctionnelle additive et homogène f(x) définie dans un espace vectoriel  $G \subset E$  (bien entendu, avec les mêmes définitions des opérations fondamentales) et telle que l'on ait pour tout  $x \subset G$ 

$$f(x) \leqslant p(x),$$

il existe toujours une fonctionnelle additive et homogène F(x) définie dans E et telle que l'on a

$$F(x) \leq p(x)$$
 pour tout  $x \subset E$  et  $F(x) = f(x)$  pour tout  $x \subset G$ .

Démonstration. Nous pouvons admettre que  $G \neq E$ ; soit  $x_0 \subset E - G$ . On a selon  $2^\circ$  pour  $x' \subset G$  et  $x'' \subset G$ :

$$f(x'')-f(x') = f(x''-x') \le p(x''-x') = p[(x''+x_0)+(-x'-x_0)]$$
  
 
$$\le p(x''+x_0)+p(-x'-x_0),$$

okatek l

<sup>(</sup>i) Cf. S. Banach [23] [ce volume, p. 381-395], en particulier p. 226 [ce volume, p. 384].

ďoù

$$-p(-x'-x_0)-f(x') \le p(x''+x_0)-f(x'').$$

Les nombres

$$m = \text{borne sup } [-p(-x-x_0)-f(x)] \text{ et } M = \text{borne inf } [p(x+x_0)-f(x)]$$

sont donc finis et  $m \le M$ . Etant donné un  $r_0$  tel que  $m \le r_0 \le M$ , on a pour tout  $x \subset G$ 

(1) 
$$-p(-x-x_0)-f(x) \le r_0 \le p(x+x_0)-f(x)$$

Considérons l'ensemble Go de tous les éléments y de la forme

(2) 
$$y = x + tx_0$$
 où  $x \subset G$  et  $t$  est un nombre.

Evidemment  $G_0$  constitue un espace vectoriel. Posons

$$\varphi(y) = f(x) + tr_0,$$

où l'élément y est défini par (2); comme  $x_0 \subset E-G$ , tout  $y \subset G_0$  admet exactement une représentation de la forme (2), de sorte que la fonctionnelle  $\varphi(y)$  se trouve définie dans  $G_0$  d'une manière univoque. On voit aussi qu'elle y est additive et homogène et qu'elle coı̈ncide dans y avec y avec y Nous allons montrer que l'on a

(4) 
$$\varphi(y) \leq p(y)$$
 pour tout  $y \subset G_0$ .

En effet, si l'on écrit y dans la forme (2), on peut admettre que  $t \neq 0$ . En mettant dans l'inégalité (1) x/t au lieu de x et en multipliant par t son membre droit ou gauche, suivant que t > 0 ou t < 0, on obtient  $tr_0 \leq p(x+tx_0)-f(x)$ , ce qui entraı̂ne d'après (3) l'inégalité (4).

Ceci établi, on voit qu'il suffit de bien ordonner l'ensemble E-G, pour arriver par des extensions successives de f(x), selon le procédé décrit tout à l'heure, à la fonctionnelle F(x) satisfaisant à la thèse du théorème.

COROLLAIRE. Etant donnée une fonctionnelle p(x) définie dans E et telle que l'on ait pour tout  $x \subseteq E$  et  $y \subseteq E$ 

$$p(x+y) \le p(x) + p(y)$$
 et  $p(tx) = tp(x)$  pour  $t \ge 0$ ,

il existe une fonctionnelle additive et homogène F(x) définie dans E et telle que l'on a pour tout  $x \subset E$ 

$$F(x) \leqslant p(x)$$
.

Considérons, en effet, un  $x_0 \subset E$  et désignons par G l'ensemble de tous les éléments de la forme  $tx_0$  où t est un nombre arbitraire. G constitue alors un espace vectoriel. En y posant  $f(tx_0) = tp(x_0)$ , on aura  $f(tx_0)$ 



 $\leq p(tx_0)$  quel que soit t, car  $t \geq 0$  entraı̂ne  $tp(x_0) = p(tx_0)$  et t < 0 entraı̂ne  $0 = p(0) \leq p(x_0) + p(-x_0)$ , d'où  $p(x_0) \geq -p(-x_0)$  et finalement  $tp(x_0) \leq -tp(-x_0) = p(tx_0)$ ; on n'a donc qu'à appliquer le théorème 1, qui précède.

# § 3. Applications: généralisation des notions d'intégrale, de mesure et de limite

Nous allons envisager maintenant quelques applications intéressantes du théorème 1 et du corollaire.

1. Soit E l'ensemble des fonctions réelles bornées x(s) définies sur une circonférence de longueur 1 et où s en désigne des arcs comptés à partir d'un point fixe dans un même sens de parcours. En admettant les définitions habituelles des opérations, E constitue un espace vectoriel.

Or, pour tout élément x = x(s) de E, convenons d'entendre par p(x) la borne inférieure de tous les nombres  $M(x; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$  de la forme

$$M(x; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \underset{-\infty < s < +\infty}{\text{borne sup}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(s + \alpha_k),$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$  est une suite arbitraire de nombres. La fonctionnelle p(x) remplit alors toutes les hypothèses du corollaire. Il est, en effet, évident que l'on a en premier lieu toujours p(tx) = tp(x) pour  $t \ge 0$ .

En second lieu, étant donnés deux éléments x = x(s) et y = y(s) de E et un nombre  $\varepsilon > 0$ , il existe des suites finies de nombres  $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$  et  $\beta_1, \beta_2, ..., \alpha_n$  telles que

(5) 
$$M(x; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_v) \leq p(x) + \varepsilon$$
 et  $M(y; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_v) \leq p(y) + \varepsilon$ .

En rangeant tous les nombres  $\alpha_i + \beta_j$  où i = 1, 2, ..., u et j = 1, 2, ..., v d'une manière quelconque en une suite  $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{uv}$ , on a

(6) 
$$p(x+y) \leq M(x+y; \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{NO})$$

et on vérifie facilement que

(7) 
$$M(x+y; \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{uv}) \leq M(x; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_u) + M(y; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_v)$$
.

Les rélations (5)-(7) entraînent  $p(x+y) \le p(x)+p(y)+2\varepsilon$ , ce qui prouve, le nombre  $\varepsilon$  étant supposé arbitraire, que  $p(x+y) \le p(x)+p(y)$ .

Ceci établi, considérons donc la fonctionnelle F(x) qui existe en vertu du corollaire.

Or, si x(s) = 1, on a p(x) = 1 et p(-x) = -1 et comme  $F(x) \le p(x)$  et  $F(x) = -F(-x) \ge -p(-x)$ , on obtient F(x) = 1. Si  $x(s) \ge 0$ , on a  $p(-x) \le 0$  et d'autre part  $F(x) = -F(-x) \ge -p(-x)$ , donc aussi  $F(x) \ge 0$ .

Chapitre II. Espaces vectoriels généraux

En outre, la fonctionnelle F(x) possède la propriété de remplir pour tout nombre  $s_0$  l'égalité  $F[x(s+s_0)] = F[x(s)]$ . Si l'on pose, en effet,  $y(s) = x(s+s_0)-x(s)$  et  $\alpha_k = (k-1)s_0$  pour k = 1, 2, ..., on a pour tout n:

$$p(y) \leqslant M(y; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \frac{1}{n} \underset{-\infty < s < +\infty}{\text{borne sup}} \left[ x(s + ns_0) - x(s) \right],$$

donc  $p(y) \le 0$ ; on obtient d'une façon analogue que  $p(-y) \le 0$ . Mais  $F(y) \le p(y)$  et  $F(y) = -F(-y) \ge -p(-y)$ , d'où F(y) = 0.

Ainsi, en désignant par le symbole  $\int x(s) ds$  la fonctionnelle  $\frac{1}{2} \{ F[x(s)] + + F[x(1-s)] \}$ , on a le théorème:

A toute fonction x(s) de la classe E on peut faire correspondre un nombre  $\int x(s) ds$  de façon que les conditions suivantes (où x(s) et y(s) sont des fonctions arbitraires de la classe E et  $a,b,s_0$  des nombres) soient remplies:

- 1)  $\int [ax(s)+by(s)] ds = a \int x(s) ds + b \int y(s) ds,$
- 2)  $\int x(s) ds \ge 0$ , lorsque  $x(s) \ge 0$ ,
- 3)  $\int x(s+s_0) ds = \int x(s) ds,$
- 4)  $\int x(1-s) ds = \int x(s) ds$ ,
- 5)  $\int 1 ds = 1$ .

Il est facile de vérifier que la fonctionnelle  $\int x(s) ds$ , remplissant les conditions 1)-5), reste toujours comprise entre les intégrales riemanniennes inférieure et supérieure de la fonction x(s). Par conséquent, pour toute fonction intégrable (R) cette fonctionnelle coıncide avec l'intégrale de la fonction.

Pour les fonctions sommables (L) la fonctionnelle en question ne coıncide pas toujours avec leur intégrale (L). Cependant, en partant de l'espace vectoriel G que constitue précisément la classe de ces fonctions et en y définissant la fonctionnelle f(x) comme l'intégrale (L) de la fonction  $x(s) \subset G$ , le théorème 1 nous fournit une fonctionnelle F(x) définie dans l'espace E et telle que la fonctionnelle  $\int x(s) ds = \frac{1}{2} \{F[x(s)] + F[x(1-s)]\}$  remplit évidemment toutes les conditions 1)-5) et coıncide en outre, pour toute fonction sommable (L), avec l'intégrale de cette fonction.

2. Considérons à présent la classe K de tous les ensembles situés sur la circonférence en question et désignons par  $A_0$  la circonférence-même. En posant pour tout ensemble A de cette classe  $\mu(A) = \int x(s) ds$  où x(s) est la fonction caractéristique de l'ensemble A, donc une fonction de l'espace E envisagé dans 1, on obtient le théorème:

A tout ensemble A de la classe K on peut attribuer un nombre  $\mu(A)$  de façon que les conditions suivantes (où A et B sont des ensembles arbitraires de la classe K) soient remplies:

- 1)  $\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B)$ , lorsque AB = 0,
- $-2) \mu(A) \geqslant 0,$
- 3)  $\mu(A) = \mu(B)$  pour  $A \cong B$ ,
- 4)  $\mu(A_0) = 1$ .

La fonctionnelle  $\mu(A)$ , qui remplit les conditions 1)-4), est comprise entre la mesure jordanienne intérieure et extérieure de l'ensemble A. Par conséquent, pour tout ensemble mesurable (J) cette fonctionnelle coı̈ncide avec la mesure de l'ensemble.

Pour des ensemble mesurables (L) quelconques la fonctionnelle en question ne coïncide pas toujours avec leur mesure (L), mais, tout comme précédemment, on peut s'arranger de façon que cette propriété soit également remplie (1).

3. Soit E l'ensemble de toutes les fonctions réelles bornées x(s) définies dans  $[0, +\infty]$ ; avec les définitions habituelles des opérations c'est un espace vectoriel.

Pour tout élément x = x(s) de E désignons par p(x) la borne inférieure de tous les nombres  $\overline{\lim_{s \to \infty}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(s+\alpha_k)$ , où  $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$  est une suite finie arbitraire de nombres positifs. On vérifie sans peine que la fonctionnelle p(x), définie ainsi dans l'espace E, satisfait aux hypothèses du corollaire. En désignant par le symbole  $\lim_{s \to \infty} x(s)(^2)$  la fonctionnelle F(x), qui existe en vertu de ce corollaire, on a donc le théorème:

A toute fonction  $x(s) \subset E$  on peut faire correspondre un nombre  $\lim_{s \to \infty} x(s)$  de façon que les conditions suivantes (où x(s) et y(s) sont des fonctions quelconques de E et a, b et  $s_0 \ge 0$  sont des nombres) soient remplies:

- 1)  $\lim_{s\to\infty} [ax(s)+by(s)] = a \lim_{s\to\infty} x(s)+b \lim_{s\to\infty} y(s)$ ,
- 2)  $\lim_{s\to\infty} x(s) \ge 0$ , lorsque  $x(s) \ge 0$ ,
- 3)  $\lim_{s\to\infty} x(s+s_0) = \lim_{s\to\infty} x(s)$ ,
- 4)  $\lim_{n \to \infty} 1 = 1$ .

La fonctionnelle  $\lim_{s\to\infty} x(s)$ , remplissant les conditions 1)-4), est comprise constamment entre  $\lim_{s\to\infty} x(s)$  et  $\lim_{s\to\infty} x(s)$ . Elle coıncide par conséquent avec  $\lim_{s\to\infty} x(s)$  toutes les fois que cette limite au sens ordinaire existe.

<sup>(1)</sup> Cf. S. Banach [9] [cette édition, vol. I, p. 66-89].

<sup>(2)</sup> Le signe Lim désigne ici une certaine "limite" généralisée, le signe lim étant par contre reservé exclusivement pour la limite dans le sens ordinaire.

4. Soit  $\{\xi_n\}$  une suite bornée quelconque. Définissons dans l'intervalle  $(0, +\infty)$  la fonction x(s) par la convention:  $x(s) = \xi_n$  pour  $n-1 < s \le n$  et  $n = 1, 2, \ldots$  La fonction x(s) appartient donc à l'ensemble E, envisagé dans 3. En posant  $\lim_{n \to \infty} \xi_n = \lim_{s \to \infty} x(s)$ , où  $\lim_{n \to \infty} x(s)$  conserve le sens adopté dans 3, on a le théorème:

A toute suite bornée  $\{\xi_n\}$  on peut faire correspondre un nombre  $\lim_{n\to\infty} \xi_n$  de façon que les conditions suivantes (où  $\{\xi_n\}$  et  $\{\eta_n\}$  sont des suites bornées arbitraires et a et b sont nombres) soient remplies:

- 1)  $\lim_{n\to\infty} (a\xi_n + b\eta_n) = a \lim_{n\to\infty} \xi_n + b \lim_{n\to\infty} \eta_n$ ,
- 2)  $\lim_{n\to\infty} \xi_n \geqslant 0$ , si  $\xi_n \geqslant 0$  pour tout n=1,2,...,
- 3)  $\lim_{n\to\infty} \xi_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ ,
- 4)  $\lim_{n \to \infty} 1 = 1$ .

Les conditions 1)-4) impliquent que la fonctionnelle  $\lim_{n\to\infty} \xi_n$  ainsi définie est comprise toujours entre  $\lim_{n\to\infty} \xi_n$  et  $\overline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n$ . Par conséquent, pour toute suite convergente cette fonctionnelle coincide avec la limite (au sens ordinaire) de la suite (1).



#### CHAPITRE III

## Espaces du type (F)

#### § 1. Définition et préliminaires

Soit E un espace vectoriel (D) complet et assujetti aux conditions suivantes  $(où x, x_n, y \text{ sont des éléments de } E \text{ et } h, h_n \text{ sont des nombres})$ :

$$1^{\circ} (x, y) = (x - y, \Theta),$$

 $2^{\circ} \lim_{n \to \infty} h_n = 0 \text{ entraı̂ne } \lim_{n \to \infty} h_n x = \Theta \text{ pour tout } x,$ 

 $3^{\circ} \lim_{n \to \infty} x_n = \Theta$  entraı̂ne  $\lim_{n \to \infty} hx_n = \Theta$  pour tout h.

Les espaces E à propriétés  $1^{\circ}-3^{\circ}$  seront dits espaces du type (F). Tous les exemples 1-10 des espaces (D), décrits au § 7 de l'Introduction, p. 30-32, sont à la fois, comme il est aisé de voir, autant d'espaces du type (F).

Les conditions 1°-3° entraînent aussitôt les propriétés suivantes de la limite:

a) lorsque  $\lim_{n\to\infty} x_n = x$  et  $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ , on  $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$ .

Il suffit, en effet, de remarquer que l'on a toujours  $(x_n+y_n, x+y)$  =  $(x_n+y_n-x-y, \Theta) \le (x_n-x+y_n-y, y_n-y)+(y_n-y, \Theta) = (x_n-x, \Theta)+(y_n-y, \Theta) = (x_n, x)+(y_n, y).$ 

b) si  $\lim_{n\to\infty} h_n = h$ , on a  $\lim_{n\to\infty} h_n x = hx$ , quel que soit  $x \subset E$ .

On a, en effet, toujours  $(h_n x, hx) = ((h_n - h)x, \Theta)$ .

Nous voyons donc que tout espace du type (F) est en même temps un espace du type (G). Il en résulte que tous les théorèmes du Chapitre I subsistent, lorsque E est supposé un espace du type (F).

Or, il est à remarquer que les espaces vectoriels du type (F) sont connexes, car pour tout x et y de E l'ensemble des éléments de la forme hx+(1-h)y où  $0 \le h \le 1$  est un ensemble connexe contenant les éléments x et y.

Etant donnée une sphère arbitraire K (voir p. 32) dans l'espace E du

 <sup>(</sup>¹) Cf. S. Mazur, O metodach sumowalności, Księga Pamiątkowa I Polskiego Zjazdu
 Matematycznego (en polonais), Supplément aux Annales de la Société Polonaise de Math. (1929), p. 102-107, voir p. 103.

<sup>4 -</sup> Oeuvres t. Il

51

type (F), il est facile de voir que l'ensemble xK (voir la définition p. 39) est également une sphère.

Soit  $h \neq 0$ . L'opération U(x) = hx constitue alors une transformation continue et biunivoque de l'espace E en lui-même et on aperçoit aisément que les ensembles fermés, ouverts, non denses, de I-e resp. de II-e catégorie, mesurables (B), se transforment respectivement en ensembles de la même nature.

On a, en particulier, le théorème suivant, qui résulte du théorème 2 (Chapitre I, § 2), p. 40, et de la remarque p. 40, tout espace du type (F) étant connexe:

Théorème 1. E étant un espace du type (F), tout espace linéaire  $H \subset E$ mesurable (B) et de II-e catégorie est identique à E.

## § 2. Opérations homogènes

Nous allons nous occuper maintenant des opérations additives définies dans un espace E du type (F) et dont les contredomaines sont situés dans un espace  $E_1$ , également du type (F).

Pour toutes les opérations de ce genre restent vrais les théorèmes 3, 4, 5 et 6 du Chapitre I. De plus, en appelant homogène toute opération U(x)qui satisfait pour tout nombre h à l'égalité U(hx) = hU(x), on a le

Théorème 2. Toute opération linéaire est à la fois homogène.

Démonstration. L'opération U(x) étant supposée linéaire, il est évident que l'on a pour tout  $x \subseteq E$  et pour tout r rationnel U(rx) = rU(x). Or, si  $\{r_n\}$  est une suite de nombres rationnels tendant vers h, on a  $\lim r_n x = hx$ . La continuité de l'opération U(x) donne par conséquent  $U(hx) = \lim_{n \to \infty} U(r_n x)$  $=\lim_{n\to\infty} r_n U(x) = hx$ ; l'opération U(x) est donc en effet homogène.

# § 3. Séries d'éléments. Inversion des opérations linéaires

Posons pour abréger

$$|x| = (x, \Theta).$$

On vérifie facilement que l'on a les relations suivantes pour tous x et v de E:

- $1^{\circ}(x, y) = |x y|$
- $2^{\circ} |\Theta| = 0; x \neq \Theta$  entraı̂ne |x| > 0.
- $3^{\circ} |-x| = |x|,$
- $4^{\circ} |x| |y| \le |x + y| \le |x| + |y|$
- $5^{\circ} \lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ entraı̂ne } \lim_{n \to \infty} |x_n| = |x|.$



Etant donnée une suite  $\{x_n\}$  d'éléments de E, on dit que la série  $\sum_{i=1}^{n} x_i$  est convergente vers un élément x, ou que x est la somme de cette série, lorsque  $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n x_i = x$ . On l'écrit:  $x = \sum_{i=1}^\infty x_i$ .

La définition de la série implique en outre les relations:

$$6^{\circ} x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ entraı̂ne } |x| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|.$$

En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un n tel que  $\left| x - \sum_{i=1}^{n} x_i \right| < \varepsilon$ , d'où  $|x| \le \varepsilon + \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \le \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} |x_i|$  et,  $\varepsilon$  étant arbitraire,  $|x| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ .

7° Si la série  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$  est convergente, la série  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$  est convergente vers un élément.

Posons, en effet,  $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ . Si p < q, on a  $|s_p - s_q| = \left|\sum_{i=1}^q x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^q |x_i|$ .

On voit donc que  $\lim_{p\to\infty, q\to\infty} |s_p-s_q| = 0$ . Par conséquent,  $\sum_{i=1}^{n} x_i$  est une série convergente vers un élément.

Ceci établi, nous allons démontrer les théorèmes suivants.

Théorème 3. Le contredomaine d'une opération linéaire est soit de I-e catégorie, soit identique à  $E_1$ .

Démonstration. Admettons que le contredomaine  $H \subset E_1$  de l'opération linéaire U(x) définie dans E soit de II-e catégorie. Nous allons prouver d'abord que

(1) pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un nombre  $\eta > 0$  tel que l'image donnée par U(x) de la sphère ouverte  $|x| < \varepsilon$  contient une sphère ouverte  $|y| < \eta$ .

Etant donné à ce but un  $\overline{\varepsilon} > 0$ , désignons pour tout n naturel par  $G_n$  l'ensemble des points de la forme x = nx', où  $|x'| < \overline{\epsilon}/2$  et par  $H_n$ l'image de  $G_n$  donnée par U(x), c.-à-d. l'ensemble des points y = U(x) où  $x \subset G_n$ . Quel que soit le point x donné, on a toujours  $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} x = \Theta$ ; il existe par conséquent un n naturel tel que  $\left|\frac{1}{n}x\right| < \frac{\overline{\varepsilon}}{2}$ , donc tel que  $x \subset G_n$ . Il en résulte que  $E = \sum_{n=1}^{\infty} G_n$  et que  $H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$ .

Or, H étant supposé de II-e catégorie, il en est de même d'un certain  $H_{n_0}$ . Soit  $K_1$  une sphère ouverte de centre  $y_1$  et de rayon  $\eta_1$  contenue dans  $H'_{no}$ .

Chapitre III. Espaces du type (F)

On en déduit aussitôt que la sphère ouverte  $K_2$  de centre  $\frac{1}{n_0}y_1$  et de rayon  $\frac{1}{n_0}\eta_1$  est contenue dans  $H_1'$ . En effet  $y \subset K_2$ , c'est-à-dire  $\left|y - \frac{1}{n_0}y_1\right|$   $< \frac{1}{n_0}\eta_1$ , entraı̂ne  $n_0y \subset K_1$ , car  $|n_0y - y_1| = \left|n_0\left(y - \frac{1}{n_0}y_1\right)\right| \le n_0\left|y - \frac{1}{n_0}y_1\right|$   $< \eta_1$ ; il existe donc des points  $\bar{y}_n \subset H_{n_0}$  tels que  $\lim_{n \to \infty} \bar{y}_n = n_0 y$ , c'est-à-dire que  $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n_0} \bar{y}_n = y$  et par conséquent  $\frac{1}{n_0} \bar{y}_n \subset H_1$ , d'où  $y \subset H_1'$ .

Soit  $K_3$  une sphère ouverte arbitraire de centre  $y_3 \subset H_1$  contenue dans  $K_2$ . L'ensemble des points  $y_3-y$  où  $y \subset H_1$  admet donc comme point d'accumulation tout point d'une sphère ouverte  $|y| < \bar{\eta}$ . Or, en posant  $y_3 = U(x_3)$  et y = U(x) où  $x_3$  et x appartiennent à  $G_1$ , on a  $|x_3-x| \le |x_3|+|x| < \bar{\epsilon}$  et  $U(x_3-x)=y_3-y$ . Il est ainsi établi que l'ensemble dérivé de l'image de la sphère ouverte  $|x| < \bar{\epsilon}$  contient une sphère ouverte  $|y| < \bar{\eta}$ .

Soit à présent  $\varepsilon_i = \varepsilon/2^i$  où i = 1, 2, ... D'après ce qui précède, il existe une suite de nombres  $\eta_i > 0$  tels que l'ensemble dérivé de l'image de la sphère ouverte  $|x| < \varepsilon_i$  contient une sphère ouverte  $|y_i| < \eta_i$  et on est évidemment libre d'admettre que  $\lim_{n \to \infty} \eta_i = 0$ . Nous allons définir par induction deux suites de points  $\{y_n\}$  et  $\{x_n\}$  comme il suit. Posons  $|y| < \eta = \eta_1$  et soient:

a)  $y_1$  un point arbitraire de  $E_1$  tel que  $|y-y_1| < \eta_2$  et  $x_1$  le point de E tel que  $U(x_1) = y_1$  et  $|x_1| < \varepsilon_1$ ,

b)  $y_n$  un point arbitraire de  $E_1$  tel que  $\left|y - \sum_{k=1}^n y_k\right| < \eta_{n+1}$  et  $x_n$  le point de E tel que  $U(x_n) = y_n$  et  $|x_n| < \varepsilon_n$ .

On a ainsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$$

et, comme  $|x_n| < \varepsilon_n = \varepsilon/2^n$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

En vertu de 7° la série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  est convergente. Soit x la somme de cette série. En vertu de (3) et 6° on a  $|x| < \varepsilon$  et en vertu de (2):  $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$ . La proposition (1) se trouve ainsi démontrée.

Or, comme pour tout  $y \subset E_1$  on a  $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} y = \Theta$  et il existe par conséquent un n naturel tel que  $\left| \frac{1}{n} y \right| < \eta$ , on peut trouver un x tel que  $U(x) = \frac{1}{n} y$ , donc que U(nx) = y. Mais il en résulte que  $H = E_1$ , conformément à la thèse du théorème.

Théorème 4. Si l'opération linéaire U(x) transforme E en  $E_1$  tout entier, il existe pour toute suite de points  $\{y_n\}$  de  $E_1$  convergente vers  $y_0 = U(x_0)$  une suite de points  $\{x_n\}$  de E convergente vers  $x_0$  et telle que  $U(x_n) = y_n$ , quel que soit n = 1, 2, ...

Démonstration. Soit  $\{\varepsilon_n\}$  une suite de nombres positifs tendant vers 0. L'opération U(x) étant linéaire, on a la proposition (1), établie au cours de la démonstration du théorème 3; il en résulte que l'image de la sphère ouverte  $|x| < \varepsilon_n$  contient une sphère ouverte  $|y| < \eta_n$  pour tout n = 1, 2, ...

Considérons un  $m_0$  naturel tel que, pour tout  $m > m_0$ , l'inégalité  $|y_m - y_0| < \eta_n$  se présente au moins pour une valeur de n et soit, pour un m donné tel que  $y_m \neq y_0$ ,  $n_m$  la plus grande de ces valeurs. Soit enfin  $x_m$  le point défini par les conventions:

- a) si  $m \le m_0$ , posons  $x_m = \text{un point arbitraire satisfaisant à l'équation } U(x_m) = y_m$ ,
- b) si  $m > m_0$  et  $y_m \neq y_0$ , posons  $x_m =$  un point arbitraire de la sphère ouverte  $|x-x_0| < \varepsilon_{n_m}$  satisfaisant à la même équation,
  - c) si  $m > m_0$  et  $y_m = y_0$ , posons  $x_m = x_0$ .

La suite  $\{x_n\}$  ainsi définie remplit — comme on vérifie facilement — la thèse du théorème.

Théorème 5. Si l'opération linéaire transforme E en  $E_1$  d'une façon biunivoque, cette transformation est en même temps bicontinue  $\binom{1}{2}$ .

La démonstration résulte immédiatement du théorème 4.

Théorème 6. Si un espace vectoriel E est un espace (F) aussi bien avec une définition de la distance (x, y) qu'avec une autre définition de la distance  $(x, y)_1$  et si

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0 \quad \text{entraı̂ne toujours} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0,$$

alors, réciproquement,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0 \quad \text{entraı̂ne toujours} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0,$$

de sorte que la notion de limite est la même pour deux métriques.

<sup>(1)</sup> Pour le cas des espaces du type (B) (cf. Chapitre V, § 1) ce théorème, de même que le théorème 6 (qui en est un corollaire) se trouve dans ma note citée p. 43, mais la démonstration y est différente.

55

La démonstration s'obtient du théorème 5, en désignant par E, l'espace E avec la métrique  $(x, y)_1$  et l'opération linéaire y = U(x) étant définie par la relation v = x.

Théorème 7. Toute opération additive y = U(x) qui remplit la condition

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} U(x_n) = y_0 \text{ entraı̂nent } y_0 = U(x_0)$$

est une opération linéaire.

Démonstration. Introduisons dans E une nouvelle définition de la distance:

(4) 
$$(x', x'')_1 = (x', x'') + (y', y''),$$

où  $x' \subset E$ ,  $x'' \subset E$ , y' = U(x'), y'' = U(x''), (x', x'') désigne la distance primitive de x' à x" dans E et (y', y'') désigne la distance de y' à y" dans  $E_1$ .

Il est facile de voir que, considéré avec la notion de distance  $(x', x'')_1$ , l'espace E est un espace du type (F); en particulier, pour vérifier qu'il est complet, soit  $\{x_n\}$  une suite de points telle que  $\lim_{p,q\to\infty} (x_p, x_q)_1 = 0$ ; par conséquent, selon (4),  $\lim_{p,q\to\infty} (x_p, x_q) = \lim_{p,q\to\infty} (y_p, y_q) = 0$ , de sorte qu'il existe un  $x_0$  et un  $y_0$  tels que  $\lim_{n\to\infty} (x_n, x_0) = \lim_{n\to\infty} (y_n, y_0) = 0$ , et, comme par hypothèse,  $y_0 = U(x_0)$ , on en tire en effet d'après (4),  $\lim_{n \to \infty} (x_n, x_0)_1 = 0$ .

Or, on a pour tout x' et x'', selon (4),  $(x', x'')_1 \ge (x', x'')$ ; par conséquent  $\lim_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0 \quad \text{entraı̂ne} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0; \quad \text{en vertu du théorème} \quad 6,$  $\lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0$  entraı̂ne donc, réciproquement  $\lim_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0$ , donc aussi, d'après (4),  $\lim_{x \to a} U(x) = U(x)$ . Ainsi l'opération additive U(x) est continue, c.q.f.d.

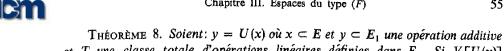
LEMME 1. Soient U'(x) et U"(x) deux opérations linéaires définies respectivement dans les espaces E' et E" du type (F) et dont les contredomaines sont situés dans l'espace E1, également du type (F). Si l'équation U'(x) = U''(y) admet pour tout x exactement une solution y = U(x), l'opération U(x) est linéaire.

La démonstration résulte du théorème 7, car, comme on aperçoit aussitôt,  $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$  et  $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = y_0$  entraînent  $y_0 = U(x_0)$ .

LEMME 2. Etant données: une opération additive y = U(x) et une opération linéaire z = V(y) telle que  $V(y) = \Theta$  entraîne  $y = \Theta$ , si en outre l'opération V[U(x)] est linéaire, l'opération U(x) est aussi linéaire.

La démonstration résulte du lemme 1, car l'équation V[U(x)] = V(y)admet pour tout x exactement une solution y = U(x).

Définition. Une classe T d'opérations linéaires est dite totale, lorsque l'ensemble des égalités  $V(x) = \Theta$  pour  $V \subset T$  entraîne l'égalité  $x = \Theta$ .



et T une classe totale d'opérations linéaires définies dans  $E_1$ . Si  $V \lceil U(x) \rceil$ est pour tout  $V \subset T$  une opération linéaire, U(x) est également une opération linéaire.

Démonstration. Admettons que l'on a  $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$  et  $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ où  $y_n = U(x_n)$  pour n = 1, 2, ...

Pour tout  $V \subset T$  on a  $\lim_{n \to \infty} V[U(x_n)] = \lim_{n \to \infty} V(y_n) = V(y_0)$  et, l'opération V[U(x)] étant linéaire,  $\lim_{n\to\infty} V[U(x_n)] = V[U(x_0)]$ , d'où  $V[U(x_0)]$  $-V(y_0) = 0$ , donc  $V[U(x_0) - y_0] = 0$  et, la classe T étant totale,  $U(x_0) = y_0$ . En vertu du théorème 7 l'opération U(x) est par conséquent linéaire.

THÉORÈME 9.  $\{U_1(x)\}\ où\ x \subset E'\ \text{et}\ \{V_1(y)\}\ où\ y \subset E''\ \text{étant deux suites}$ d'opérations linéaires à contredomaines situés dans un espace  $E_1$  du type (F), si le système d'équations  $U_i(x) = V_i(y)$  où i = 1, 2, ..., admet pour tout x exactement une solution y = U(x), l'opération y = U(x) est linéaire.

Démonstration. Admettons en effet que l'on a  $\lim x_n = x_0$  et, pour la suite correspondante  $\{y_n\}$ , que  $\lim_{n\to\infty}y_n=y_0$ . En raison de la continuité des opérations  $\{U_i\}$  et  $\{V_i\}$ , on a alors  $U_i(x_0) = V_i(y_0)$  pour tout i = 1, 2, ...,d'où  $v_0 = U(x_0)$ , ce qui entraîne selon le théorème 7 la continuité de l'opération y = U(x).

## § 4. Fonctions continues sans dérivée

A titre d'application, nous allons démontrer d'abord par une déduction facile du théorème 4 du Chapitre I, p. 40, l'existence d'une fonction continue n'ayant pas de dérivée dans un ensemble de mesure positive (1).

(C1) désignant l'ensemble de toutes les fonctions continues périodiques de période 1, posons pour tout couple de fonctions  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  de  $(C^1)$ :

$$(x_1(t), x_2(t)) = \max_{0 \le t \le 1} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

Il est facile de voir que  $(C^1)$  constitue alors un espace du type (F). Soit pour un nombre arbitraire  $h \neq 0$ 

(5) 
$$y(t) = \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \quad \text{pour} \quad 0 \le t \le 1.$$

<sup>(1)</sup> S. Banach [17] [ce volume, p. 355-364], La méthode appliquée a été développée ensuite par M. S. Saks et M. H. Steinhaus, qui l'ont employée pour traiter divers problèmes de la Théorie des fonctions (cf. S. Saks [Sur les fonctionnelles de M. Banach et leur application aux développements des fonctions], Fundamenta Mathematicae 10 (1927), p. 186-196, et H. Steinhaus [Anwendungen der Funktionenanalysis auf einige Fragen der reellen Funktionentheorie], Studia Mathematica 1 (1929), p. 51-81).

(S) désignant l'espace des fonctions mesurable (cf. 1, p. 30), qui est du type (F) (cf. § 1, p. 49), admettons que  $y(t) \subset (S)$ . L'expression (5) définit alors une opération linéaire à domaine ( $C^1$ ) et à contredomaine contenu dans (S).

Soient  $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$  où  $h_n \neq 0$  et

(6) 
$$U_n(x) = \frac{x(t+h_n)-x(t)}{h_n} \quad \text{pour} \quad 0 \le t \le 1.$$

Or, si toute fonction continue avait presque partout la dérivée, la limite de l'expression (6) existerait pour presque toutes les valeurs de t. Il existerait par conséquent pour tout  $x \subset (C^1)$  la limite  $\lim_{n\to\infty} U_n(x)$ , qui serait définie dans le domaine (S), c.-à-d. une limite en mesure. En posant  $U(x) = \lim_{n\to\infty} U_n(x)$ , on obtiendrait donc une opération additive U(x) mesurable (B) qui, en vertu du théorème 4, Chapitre I, p. 40, serait une opération linéaire. U(x) est évidemment la dérivée de la fonction x(t).

Il résulte de la continuité de l'opération U(x) que si  $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 0$  uniformément, on a  $\lim_{n\to\infty} x_n'(t) = 0$  en mesure. Cependant pour  $x_n(t) = \frac{1}{n} \sin \frac{nt}{2\pi}$  on a  $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 0$  uniformément, tandis que la suite des dérivées  $\left\{\frac{1}{2\pi} \cos n \frac{t}{2\pi}\right\}$  ne tend pas vers 0 en mesure. Il existe par conséquent des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée dans un ensemble de mesure positive.

# § 5. La continuité des solutions des équations différentielles aux dérivées partielles

Soit F(x) = 0 une équation différentielle partielle linéaire p. ex. du second ordre:

(7) 
$$F(x) = a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + a_3 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + a_4 \frac{\partial x}{\partial u} + a_5 \frac{\partial x}{\partial v} + a_6 x = 0,$$

où  $a_i$  (i = 1, 2, ..., 6) sont des fonctions continues des variables u et v dans une région fermée  $\bar{G}$  ayant pour frontière une courbe simple fermée C.

Il peut arriver que, pour des conditions aux limites d'une certaine nature, l'équation (7) admette toujours une seule solution x(u, v) qui est continue dans  $\overline{G}$  avec ses dérivées partielles qui figurent dans (7), c.-à-d. du premier et second dégré dans l'intérieur G de  $\overline{G}$ .

Dans cette hypothèse, les conditions aux limites peuvent être d'ailleurs

bien diverses. Elles peuvent consister p. ex. à donner sur une partie de cette courbe (type hyperbolique, parabolique) ou les valeurs de la dérivée sur les normales à la courbe C etc.

Supposons encore que, t désignant le paramètre qui parcourt C, l'équation (7) admette pour toute fonction  $\xi(t)$  continue avec ses dérivées p. ex. jusqu'à l'ordre r une solution x(u, v) se réduisant sur C à la fonction  $\xi(t)$ .

Ceci posé, nous allons démontrer que

Si la suite  $\{\xi_n(t)\}$  remplit les conditions (imposées à  $\xi(t)$ ) et si l'on a uniformément  $\lim_{n\to\infty}\xi_n(t)=0$  et  $\lim_{n\to\infty}\xi_n^{(i)}(t)=0$  pour i=1,2,...,r, alors,  $\{x_n(u,v)\}$  désignant la suite des solutions correspondantes de l'équation F(x)=0, on a uniformément dans  $\bar{G}\colon \lim_{n\to\infty}x_n(u,v)=0$  et uniformément dans toute région fermée située dans  $G\colon \lim_{n\to\infty}(\partial^2x_n/\partial u^2)=0$ ,  $\lim_{n\to\infty}(\partial^2x_n/\partial v^2)=0$ , ..., etc. (pour toutes les dérivées partielles qui figurent dans l'équation (7)).

Pour la démonstration, désignons par E l'ensemble de toutes les fonctions x(u, v) satisfaisant à (7), continues dans  $\overline{G}$  et ayant les dérivées partielles des deux premiers ordres (celles qui figurent dans (7)) continues dans G. Soit  $\{\overline{G}_n\}$  une suite de régions fermées situées dans G et telles que  $G = \sum_{k=1}^{\infty} G_k$ . Posons pour tout couple  $x(u, v) \subset E$  et  $y(u, v) \subset E$ :

$$(x, y) = \max_{u,v \in \overline{G}} |x(u, v) - y(u, v)| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max_{u,v \in \overline{G}_k} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right| + \dots}{1 + \max_{u,v \in \overline{G}_k} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right| + \dots},$$

en y faisant entrer les différences de toutes les dérivées partielles qui figurent dans l'équation (7).

Ainsi métrisé, E constitute un espace du type (F) et la relation  $\lim_{n\to\infty} x_n = x$  (suivant la distance définie de la sorte) signifie que  $x_n$  tend uniformément vers x dans  $\bar{G}$  en même temps que les dérivées partielles  $\partial^2 x_n/\partial u^2$ , ... (figurant dans (7)) tendent uniformément vers les dérivées partielles correspondantes de la fonction x dans toute région fermée  $\bar{G}_k$  où k=1,2,...

Soit  $E_1$  l'ensemble des fonctions  $\xi(t)$ , où t parcourt C, continues avec leurs r premières dérivées. Posons pour tout couple  $\xi(t) \subset E_1$  et  $\eta(t) \subset E_1$ :

$$(\xi, \eta) = \max_{t \in C} |\xi(t) - \eta(t)| + \sum_{i=1}^{r} \max_{t \in C} |\xi^{(i)}(t) - \eta^{(i)}(t)|.$$

Désignons maintenant par  $\xi = U(x)$  l'opération qui fait correspondre à toute fonction  $x = x(u, v) \subset E$  la fonction  $\xi = \xi(t)$  à laquelle x(u, v) se

réduit sur la frontière C de G. Ainsi définie, l'opération U(x) est manifestement additive et continue.

Or, le contredomaine de l'opération U(x) étant un espaces du type (F), l'opération inverse  $x = U^{-1}(\xi)$ , qui existe par hypothèse, est en vertu du théorème 5, p. 53, continue, ce qui implique la proposition à démontrer.

Remarque. Si nous faisions tomber l'hypothèse de l'univocité de la solution de l'équation (7), nous serions restreints à ne conclure (en vertu du théorème 4, p. 53) que ceci:  $\{\xi_n(t)\}$  ayant la signification précédente, il existe une suite de fonctions  $\{x_n(u,v)\}$  satisfaisant à (7), se réduisant sur C à  $\xi_n(t)$  et telles qu'on a  $\lim_{n\to\infty} x_n(u,v) = 0$  uniformément dans  $\overline{G}$  et  $\lim_{n\to\infty} \partial^2 x_n/\partial u^2 = 0$ , ... uniformément dans toute région fermée contenue dans G.

#### § 6. Systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues

Soient  $(a_{ik})$  où i=1,2,..., et k=1,2,..., un tableau (suite double) arbitraire de nombres réels et  $E_1$  un espace du type (F) dont les éléments sont des suites de nombres.

Théorème 10. Si pour toute suite  $y = \{\eta_i\} \subset E_1$  le système d'équations

(8) 
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_{k} = \eta_{i} \quad o\dot{u} \quad i = 1, 2, ...,$$

admet toujours une seule solution  $\{\xi_k\}$ , il existe des fonctionnelles linéaires  $\xi_k = f_k(y)$  où k = 1, 2, ..., définies dans  $E_1$  et telles que l'on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k(y) = \eta_i \quad \text{pour tout } y \subset E_1 \text{ et } i = 1, 2, \dots$$

Démonstration. Désignons par E l'ensemble de toutes les suites  $x = \{\xi_k\}$  qui remplissent les conditions

- a) la série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k$  est convergente pour tout i = 1, 2, ...,
- b) la suite  $\{\eta_i\} = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k\}$  appartient à  $E_1$ .

Posons pour tout couple  $x' = \{\xi'_k\}$  et  $x'' = \{\xi''_k\}$  d'éléments de E:

$$(x', x'')_i = \text{borne sup} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} (\xi_k' - \xi_k'') \right|,$$

$$(x', x'')_0$$
 = distance des suites  $\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k'\}$  et  $\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k''\}$  dans  $E_1$ 

et définissons la distance (x', x'') dans E par la formule

$$(x', x'') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{(x', x'')_i}{1 + (x', x'')_i}.$$

Remarquons que

(9) Pour tout  $k = 1, 2, ..., si \lim_{n \to \infty} x_n = \Theta$  où  $x_n = \{\xi_k^{(n)}\} \subset E$ , on  $a \lim_{n \to \infty} \xi_k^{(n)} = 0$ .

En effet, par suite de l'univocité des solutions du système d'équations (8) la k-ième colonne contient au moins un terme  $a_{ik} \neq 0$ . Admettons donc que

(10) 
$$a_{i,k} \neq 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, ...$$

Comme  $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$ , on a  $\lim_{n\to\infty} (x_n, \Theta)_{i_1} = 0$ , d'où  $\lim_{n\to\infty} \xi_1^{(n)} = 0$ , car (10) donne  $a_{i_11} \neq 0$ , et il est facile à présent de prouver par induction que l'on a d'une façon générale  $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$  pour tout k naturel.

Ainsi établie, la proposition (9) permet de montrer que E est un espace vectoriel complet.

Admettons à ce but que la suite  $\{x_n\}$  où  $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$  remplit la condition  $\lim_{p \to \infty, q \to \infty} (x_p, x_q) = 0$ . Par conséquent  $\lim_{p \to \infty, q \to \infty} (x_p - x_q) = 0$ , d'où en vertu de (9),  $\lim_{p \to \infty, q \to \infty} (\xi_k^{(p)} - \xi_k^{(q)}) = 0$  pour k = 1, 2, ..., de sorte qu'il existe un  $\lim_{n \to \infty} \xi_k^{(n)} = \xi_k$  pour tout k naturel. Soit  $x = \{\xi_k\}$ . On vérifie aisément que  $x \subset E$  et que  $\lim_{n \to \infty} (x_n, x)_i = 0$  pour tout i = 0, 1, ..., d'où  $\lim_{n \to \infty} (x_n, x) = 0$ ; l'espace E est donc, en effet, complet.

Il en résulte que E est un espace du type (F). Ceci établi, posons

$$y = U(x)$$

pour toutes deux suites  $x = \{\xi_k\} \subset E$  et  $y = \{\eta_i\} \subset E_1$  qui satisfont au système d'équations (8).

On voit aussitôt que

(11) 
$$(y, \Theta) = (x, \Theta)_0 \leqslant (x, \Theta),$$

où  $(y, \Theta)$  désigne, bien entendu, la distance dans  $E_1$  et  $(x, \Theta)$  celle dans E. En vertu de (11),  $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$  entraı̂ne  $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = \Theta$ . L'opération y = U(x) est donc linéaire et comme elle transforme E en  $E_1$  d'une façon univoque, l'opération inverse  $x = U^{-1}(y)$  est d'après le théorème 5, p. 41, également linéaire. Par conséquent, si l'on pose pour  $k = 1, 2, ..., \xi_k = f_k(y)$  où  $x = U^{-1}(y) = \{\xi_k\}$ , on voit que  $\lim_{n\to\infty} y_n = \Theta$ , où  $x_n = U^{-1}(y_n) = \{\xi_k^n\}$ ,

entraı̂ne  $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$ , donc  $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$ ; ainsi les fonctionnelles additives  $f_k(y)$  sont des fonctionnelles linéaires dans  $E_1$ , c.q.f.d.

Ce théorème implique, comme nous allons voir, le théorème suivant (1):

Si le système d'équations (8) admet exactement une solution pour toute suite  $\{\eta_i\}$  appartenant

1° à l'espace des suites convergentes vers 0,

2° à l'espace (s),

3° à l'espace (1),

 $4^{\circ}$  à l'espace  $(l^{(p)})$  où p > 1,

il existe un tableau {bki} tel que

$$\zeta_k = \sum_{i=1}^{\infty} b_{ki} \eta_i \quad pour \quad k = 1, 2, ...,$$

où les suites  $\{\xi_k\}$  et  $\{\eta_i\}$  satisfont au système d'équations (8) et qui remplit respectivement les conditions:

$$1^{\circ} \sum_{i=1}^{\infty} |b_{ki}| < \infty \text{ pour } k = 1, 2, ...,$$

 $2^{\circ}$  il n'a que des lignes finies (c.-à-d. qu'il existe une suite numérique  $n_k$  telle que l'on a  $b_{ki} = 0$  pour tout  $i > n_k$ ),

 $3^{\circ} |b_{ki}| < m_k$  pour une suite de nombres  $\{m_k\}$ ,

$$4^{\circ} \sum_{i=1}^{\infty} |b_{ki}|^{\frac{p}{p-1}} < \infty \text{ pour } k = 1, 2, ...$$

Remarque. Si l'on suppose que le système d'équations (8) admet exactement une solution pour toute suite convergente  $\{\eta_i\}$  (pas nécessairement convergente vers 0), il existe, en dehors du tableau  $\{b_{ki}\}$  assujetti à 1°, une suite  $\{c_k\}$  telle que

$$\xi_k = c_k \lim_{i=1}^{n} \eta_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_{ki} \eta_i$$
 pour  $k = 1, 2, ...$ 

Tous ces théorèmes s'obtiennent du théorème général établi au début (théorème 10, p. 58) par une représentation convenable de la fonctionnelle linéaire dans chaque espace particulier (voir théorèmes p. 61, et 74-76).

# § 7. Applications de l'espace (s)

Nous allons établir la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace (s) des suites de nombres (voir Introduction § 7, 2, p. 30).

Théorème 11. Toute fonctionnelle linéaire f(x) définie dans l'espace (s) est de la forme

(12) 
$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \, \xi_i,$$

où N est un nombre naturel dépendant de f.

Démonstration. Soit  $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$  où  $\xi_i^{(n)} = 0$  pour  $i \neq n$  et  $\xi_n^{(n)} = 1$ . Posons  $f(x_n) = a_n$ . Pour toute suite  $x = \{\xi_n\}$ , on a  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ , d'où  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ . Or, cette série étant convergente pour toute suite  $\{\xi_n\}$ , il existe un N naturel tel que l'on a  $a_n = 0$  pour tout n > N, d'où la forme (12) de f(x).

M. O. Toeplitz(1) a établi le théorème suivant:

Théorème 12. Pour qu'il existe une suite de nombres  $\{\xi_k\}$  satisfaisant au système d'équations (8), il faut et il suffit que, pour toute suite finie de nombres  $h_1,h_2,\ldots,h_r$ , la condition  $\sum_{i=1}^r h_i a_{ik} = 0$  où  $k=1,2,\ldots$  entraîne l'égalité  $\sum_{i=1}^r h_i \eta_i = 0$ .

En particulier, si la condition  $\sum_{i=1}^{r} h_i a_{ik} = 0$  où k = 1, 2, ... entraîne  $h_1 = h_2 = ... = h_r = 0$ , le système d'équations (8) admet une solution pour toute suite  $\{\eta_i\}$ .

Nous allons démontrer le

Théorème 13. Si le système d'équations (8) admet pour toute suite  $y = \{\eta_i\}$  exactement une solution, il existe pour tout i naturel un  $N_i$  naturel tel qu'on a  $a_{ik} = 0$  pour tout  $k > N_i$ .

Démonstration. Posons  $\xi_k = f_k(y)$  pour  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i$  où i = 1, 2, ... En vertu du théorème 10, p. 58,  $f_k(y)$  est une fonctionnelle linéaire définie dans l'espace (s) des suites de nombres réels (cf. p. 30). Il existe donc pour tout k naturel une suite finie de nombres  $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, ..., \alpha_{N_k k}$  tel que

(13) 
$$f_{k}(y) = \sum_{i=1}^{N_{k}} \alpha_{ik} \eta_{i} = \xi_{k}.$$

Or, les équations du système (13) sont linéairement indépendantes.

<sup>(1)</sup> Dont le cas 4° a été connu (cf. F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris 1913).

<sup>(1)</sup> O. Toeplitz, Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo XXVIII (1909), p. 88-96.



En effet, supposons par contre qu'il existe une suite finie de nombres  $h_1, h_2, ..., h_r$  telle que  $\sum_{k=1}^r h_k \alpha_{ik} = 0$  où i = 1, 2, ... On aurait donc selon (13)

(14) 
$$\sum_{k=1}^{r} h_k \zeta_k = \sum_{k=1}^{r} h_k f_k(y) = 0 \quad \text{pour toute suite } y = \{\eta_i\}.$$

En posant  $\eta_i^0 = a_{ij}$  pour un  $j \le r$  naturel arbitrairement fixé, on constate aussitôt que l'on a pour la solution correspondante  $\{\xi_k^0\}$  du système d'équations (8):  $\xi_j^0 = 1$  et  $\xi_k^0 = 0$  pour tout  $k \ne j$ . Ces valeurs mises dans (14) donnent  $h_j = 0$ ; en conséquence, tous les coefficients  $h_k$  s'annulent, ce qui prouve l'indépendance linéaire des équations (13).

Il en résulte en vertu du théorème 12 l'existence pour toute suite  $\{\xi_k\}$  d'une suite de nombres  $\{\eta_i\}$  satisfaisant aux équations (13). La série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k$  est par conséquent convergente pour toute suite  $\{\xi_k\}$  d'où l'existence pour tout  $i=1,2,\ldots$  d'un  $N_i$  conforme à la thèse du théorème.

Remarque. En faisant tomber l'hypothèse d'après laquelle il n'existe qu'une seule solution, le théorème cesse d'être vrai.

En effet,  $\{\eta_j\}$  étant une suite arbitraire, il existe une série entière  $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k z^k$  à coefficients réels  $\xi_k$  telle que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k j^k = \eta_j \quad \text{où} \quad j = 1, 2, \dots$$

Or, ce système d'équations admet donc une solution pour toute suite  $\{\eta_i\}$ ; évidemment cette solution n'est pas unique, car il existe une série entière distincte de 0 et telle que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k j^k = 0 \quad \text{où} \quad j = 1, 2, \dots$$

#### CHAPITRE IV

# Espaces normés

# § 1. Définitions des espaces vectoriels normés et des espaces du type (B)

Un espace vectoriel E est dit normé s'il existe une fonctionnelle — qui est appelée norme et désignée par |x| ou ||x|| — assujettie aux conditions:

- 1)  $|\Theta| = 0$  et |x| > 0 pour  $x \neq \Theta$ ,
- 2)  $|x+y| \le |x| + |y|$ ,
- 3)  $|tx| = |t| \cdot |x|$  pour tout nombre t.

Si on définit la distance de deux éléments x et y de E par la formule

$$(x, y) = |x - y|,$$

on obtient évidemment un espace métrique. S'il est, de plus, complet (voir p. 30; c.-à-d. dans le cas considéré que  $\lim_{q\to\infty,p\to\infty}|x_p-x_q|=0$  entraı̂ne l'existence d'un  $x\subset E$  tel que  $\lim_{n\to\infty}|x_p-x|=0$ ), il s'appelle espace du type  $(B)(^1)$ .

On voit aussitôt que tout espace du type (B) est en même temps du type (F), mais non réciproquement: les exemples d'espaces décrits dans l'Introduction, p. 30-32, et qui sont tous du type (F), ne sont du type (B) qu'à l'exception des espaces (s) et (S).

## § 2. Propriétés des opérations linéaires. Extension des fonctionnelles linéaires

Nous allons nous occuper d'abord des espaces *E normés*, mais pas nécessairement complets.

Théorème 1. Pour qu'une opération additive U(x) définie dans un espace

<sup>(1)</sup> La classe des espaces du type (B) a été traitée d'une façon générale pour la première fois dans mon ouvrage précité [7] [ce volume, p. 305-348].

vectoriel  $G \subset E$  soit linéaire, il faut et il suffit qu'il existe un nombre M tel qu'on ait:

$$(1) |U(x)| \leq M \cdot |x| pour tout x \subset G.$$

Démonstration (1). La condition est nécessaire. En effet, à défaut d'un pareil M, il existerait une suite  $\{x_n\}$  telle que  $|U(x_n)| > M_n |x_n|$  où  $\lim_{n \to \infty} M_n = +\infty$ . En posant  $Y_n = \frac{1}{M_n |x_n|} \cdot x_n$ , on aurait donc  $|Y_n| = \frac{1}{M_n}$ , d'où  $\lim_{n \to \infty} Y_n = \Theta$  et par conséquent  $\lim_{n \to \infty} U(Y_n) = \Theta$ , ce qui est impossible, car  $|U(Y_n)| = \frac{1}{M_n |x_n|} \cdot |U(x_n)| > 1$ .

La condition est suffisante. En effet, pour tous  $x_n$  et x de G,  $\lim_{n\to\infty} x_n$  = x entraı̂ne  $\lim_{n\to\infty} |x-x_n| = 0$ , donc  $\lim_{n\to\infty} |U(x_n)-U(x)| = \lim_{n\to\infty} |U(x-x_n)|$   $\leq \lim_{n\to\infty} M \cdot |x-x_n| = 0$  et enfin  $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$ , c.q.f.d.

Etant donnée une opération linéaire U(x) définie dans un espace vectoriel  $G \subset E$ , on appelle norme de l'opération U(x) dans G et on désigne par  $|U|_G$  le plus petit nombre M satisfaisant à la condition (1). Si G = E, on peut l'écrire tout court |U| au lieu de  $|U|_E$ .

On a donc  $|U(x)| \leq |U|_{G} \cdot |x|$  pour  $x \subset G$  et il est facile de voir que

$$|U|_G = \underset{x \in G, |x| \leq 1}{\text{borne sup }} |U(x)|.$$

La question s'impose s'il existe pour tout espace vectoriel normé une fonctionnelle linéaire (définie dans cet espace) qui n'est pas identiquement nulle. La réponse affirmative résulte des théorèmes suivants (²) dont le premier est une conséquence facile du théorème 1 (Chapitre II, § 2), p. 43.

THÉORÈME 2. Etant donnée une fonctionnelle linéaire f(x) définie dans un espace vectoriel  $G \subset E$ , il existe une fonctionnelle linéaire F(x) définie dans E et satisfaisant aux conditions:

$$F(x) = f(x)$$
 pour  $x \subset G$  et  $|F| = |f|_G$ .

Pour la démonstration, il suffit de poser  $p(x) = |x| \cdot |f|_G$  dans le théorème 1 du Chapitre II.

THÉORÈME 3. Pour tout  $x_0 \subset E$ ,  $x_0 \neq \Theta$ , il existe une fonctionnelle linéaire F(x) définie dans E et telle que

$$F(x_0) = |x_0|$$
 et  $|F| = 1$ .

Pour la démonstration, il suffit de désigner dans le théorème 2, qui précède, par G l'ensemble des éléments de la forme  $hx_0$  où h est un nombre arbitraire et de poser  $f(hx_0) = h \cdot |x_0|$ .

Il en résulte, en particulier, l'existence dans tout espace vectoriel normé d'une fonctionnelle linéaire n'étant pas identiquement nulle.

THÉORÈME 4. Soit f(x) une fonctionnelle quelconque définie dans un ensemble  $G \subset E$ . Pour qu'il existe une fonctionnelle linéaire F(x) définie dans E et satisfaisant aux conditions

 $1^{\circ} f(x) = F(x) pour x \subset G$ 

 $2^{\circ} |F| \leq M$  pour un nombre donné M > 0, il faut et il suffit que l'on ait l'inégalité

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_{i} f(x_{i})\right| \leq M \cdot \left|\sum_{i=1}^{r} h_{i} x_{i}\right|$$

pour toute suite finie  $x_1, x_2, ..., x_r$  d'éléments de G et pour toute suite finie  $h_1, h_2, ..., h_r$  de nombres réels (1).

Démonstration. La condition est nécessaire. On a en effet

$$\left|F\left(\sum_{i=1}^{r}h_{i}x_{i}\right)\right| \leq |F|\cdot\left|\sum_{i=1}^{r}h_{i}x_{i}\right|$$

d'où selon 2°

$$\left|\sum_{i=1}^r h_i F(x_i)\right| \leqslant M \cdot \left|\sum_{i=1}^r h_i x_i\right|$$

et comme on a selon 1°  $F(x_i) = f(x_i)$  pour tout  $x_i \subset G$ , il en résulte l'inégalité à démontrer.

La condition est suffisante. Soit, en effet, H l'espace vectoriel des éléments de la forme  $z=\sum_{i=1}^r h_i x_i$  où r designe un nombre naturel,  $h_i$  des nombres quelconques et  $x_i\subset G$ . Posons  $\varphi(z)=\sum_{i=1}^r h_i f(x_i)$ .

Pour 
$$z = \sum_{i=1}^{r} h_i x_i = \sum_{i=1}^{s} h'_i x'_i$$
 on a par hypothèse 
$$\left| \sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i) - \sum_{i=1}^{s} h'_i f(x'_i) \right| \leq M \cdot \left| \sum_{i=1}^{r} h_i x_i - \sum_{i=1}^{s} h'_i x'_i \right| = 0.$$

<sup>(1)</sup> Cf. S. Banach [7] [ce volume, p. 305-348].

<sup>(2)</sup> Les théorèmes 2-6 se trouvent dans la note de M. H. Hahn, Über lineare Gleichungen in linearen Räumen, Journal für die reine und angewandte Mathematik 157 (1927), p. 214-229; cf. aussi S. Banach [22] [ce volume, p. 375-380], en particulier le théorème 2 et remarque.

<sup>(1)</sup> Ce théorème a été établi pour certains espaces spéciaux par F. Riesz (Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Mathematische Annalen 69 (1910), p. 449-497) et, dans une forme plus générale, par E. Helly (Über lineare Funktionaloperationen, Berichte der Wiener Akademie der Wissenschaften, IIa, 121 (1912), p. 265-297).

La fonctionnelle  $\varphi(z)$  est donc définie dans H d'une façon univoque et, comme on voit facilement, elle y est additive. En outre,  $|\varphi(z)| = |\sum_{i=1}^{\infty} h_i f(x_i)|$ 

Théorie des opérations linéaires

 $\leq M \cdot \left| \sum_{i=1}^{r} h_i x_i \right|$  donne  $|\varphi|_H \leq M$ . L'existence dans E de la fonctionnelle F(x) à propriétés 1° et 2° s'obtient donc du théorème 2, p. 64, par substitution de  $\varphi$  à f et de H à G.

En particulier, si G est une suite  $\{x_n\}$  d'éléments de E et  $C_n$  désignent les valeurs correspondantes de la fonctionnelle f(x), on a le

Théorème 5. Pour qu'il existe dans E une fonctionnelle linéaire F(x)assuiettie aux conditions

$$1^{\circ} F(x_n) = C_n \text{ pour } n = 1, 2, ..., \text{ et }$$

$$2^{\circ} |F| \leq M$$

pour un nombre donné M > 0, une suite donnée  $\{x_n\}$  d'éléments de E et une suite donnée {C<sub>n</sub>} de nombres réels, il faut et il suffit que l'inégalité

$$\left|\sum_{i=1}^r h_i C_i\right| \leqslant M \cdot \left|\sum_{i=1}^r h_i x_i\right|$$

se présente pour toute suite finie  $h_1, h_2, ..., h_r$  de nombres réels.

#### § 3. Ensembles fondamentaux et ensembles totaux d'éléments

Nous allons établir à présent quelques théorèmes qui jouent dans la théorie des espaces normés un rôle analogue à celui que le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par les polynômes joue dans le théorie des fonctions de variable réelle.

Lemme. Etant donné un espace vectoriel  $G \subset E$  et un élément  $y_0$  de Esitué à la distance d > 0 de G, il existe une fonctionnelle linéaire F(x) définie dans E et satisfaisant aux conditions:

- 1)  $F(y_0) = 1$ ,
- 2) F(x) = 0 pour  $x \subseteq G$ .
- 3) |F| = 1/d.

Démonstration. Soit H l'ensemble des x de la forme

(2) 
$$x = x' + \alpha y_0$$
 où  $\alpha$  est un nombre arbitraire et  $x' \subset G$ .

Ainsi défini, H est évidemment un ensemble linéaire et comme d > 0, la représentation (2) de x est univoque. Nous définissons dans H la fonctionnelle additive f(x), en posant  $f(x) = \alpha$  pour x de la forme (2). Comme  $|x| = |x' + \alpha y_0| = |\alpha| \cdot |x'/\alpha + y_0| \ge |\alpha| \cdot d$ , if vient d'une part  $|f(x)| = |\alpha|$  $\leq |x|/d$ , d'où  $|f|_H \leq 1/d$ . D'autre part  $\lim_{n \to \infty} |x_n - y_0| = d$  pour  $x_n \subset G$ entraı̂ne  $|f(x_n - y_0)| = 1 \le |x_n - y_0| \cdot |f|_H$ , d'où  $1 \le d \cdot |f|_H$ , donc  $1/d \le |f|_H$ . On a par conséquent  $|f|_H = 1/d$ .



On en conclut en vertu du théorème 2, p. 64 (en y remplaçant G par H) qu'il existe une fonctionnelle linéaire F(x) définie dans E et telle que F(x) = f(x) pour  $x \subset H$  et  $|F| = |f|_H = 1/d$  (condition 3), donc, en particulier, F(x) = 0 pour  $x \subset G$  (condition 2) et  $F(y_0) = 1$  (condition 1),

Théorème 6. Etant donnés un ensemble quelconque  $G \subseteq E$  et un élément arbitraire y<sub>0</sub> de E, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite  $\{g_n\}$  de combinaisons linéaires (1) d'éléments de G telle que  $\lim g_n = y_0$ , est que f(x) = 0 pour  $x \subseteq G$  entraı̂ne  $f(y_0) = 0$ , quelle que soit la fonctionnelle linéaire f(x).

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, l'égalité f(x) = 0 pour tous les  $x \subset G$  entraı̂ne l'égalité  $f(g_n) = 0$  pour n = 1, 2, ...,d'où  $f(\lim_{n\to\infty}g_n)=f(y_0)=0.$ 

La condition est suffisante en vertu du lemme qui précède, en y désignant par G l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de l'ensemble G considéré ici, c.q.f.d.

Un ensemble  $G \subset E$  s'appelle fondamental, lorsque l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de G est dense dans E; il s'appelle total, lorsque toute fonctionnelle linéaire f(x) qui s'annule pour chaque  $x \subset G$ , s'annule aussi pour chaque  $x \subset E$ .

On déduit aisément du théorème 6 le suivant.

Théorème 7. Pour qu'un ensemble  $G \subset E$  soit fondamental, il faut et il suffit qu'il soit total.

Une fonctionnelle linéaire f(x) est dite orthogonale à un élément  $x_0$ , lorsque  $f(x_0) = 0$ ; elle est dite orthogonale à G, lorsque cette égalité se présente pour tout  $x \subset G$ .

Le lemme p. 66 implique pour tout sous-ensemble  $G \neq E$  linéaire et fermé l'existence dans l'espace E d'une fonctionnelle linéaire non identiquement nulle et orthogonale à G.

## § 4. Forme générale des fonctionnelles linéaires dans les espaces $(C), (L^{(r)}), (c), (l^{(r)}), (m)$ et dans les sous-espaces de (m)

Nous allons établir à présent la forme générale des fonctionnelles linéaires dans certains espaces normés particuliers (2).

1. Espace (C). La norme définie dans l'espace (M) (3) coïncidant pour les fonctions continues avec celle de l'espace (C), on peut considérer (C) comme un espace vectoriel situé dans (M).

<sup>(1)</sup> Voir la définition de cette notion Chapitre II, § 1, p. 42.

<sup>(2)</sup> Cf. Introduction, § 7, p. 31-32, exemples, 4, 5, 6, 8 et 9.

<sup>(3)</sup> Voir 3, p. 30.

Etant donnée une fonctionnelle linéaire f(x) définie dans (C), il existe en vertu du théorème 2, p. 64, une fonctionnelle linéaire F(x) définie dans (M) et satisfaisant aux conditions:

(1) 
$$F(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \subset (C),$$

$$|F|_{(M)} = |f|_{(C)}.$$

Posons:

$$\xi_t = \xi_t(u) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \le u \le t, \\ 0 & \text{pour} \quad t < u \le 1, \end{cases}$$

et

$$(3) F(\xi_i) = g(t).$$

Nous allons montrer que g(t) est une fonction à variation bornée. Soient  $a=t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$  et  $\varepsilon_i = \text{sign} \left[g(t_i) - g(t_{i-1})\right]$  pour  $i=1,2,\ldots$   $\ldots,n$ . On a  $\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \{g(t_i) - g(t_{i-1})\} \varepsilon_i = F\left[\sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\} \varepsilon_i\right]$   $\leq |F|_{(M)} \cdot \|\sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\} \varepsilon_i\|$  et on aperçoit aisément que la norme de cette somme est = 1. Il en résulte d'après (2) que

(4) 
$$\underset{0 \le t \le 1}{\text{variation }} g(t) \le |F|_{(M)} = |f|_{(C)}.$$

Ceci établi, soient  $x(t) \subset (C)$  et

(5) 
$$z_n = z_n(u) = \sum_{r=1}^n x \left(\frac{r}{n}\right) \cdot \left\{ \xi_r(u) - \xi_{\frac{r-1}{n}}(u) \right\}.$$

La fonction  $z_n(u)$  prend donc respectivement dans les intervalles  $(r-1)/n < u \le r/n$  les valeurs x(r/n). La fonction x = x(u) étant continue, on a  $\lim_{n \to \infty} ||x - z_n|| = 0$ , d'où selon (1):

(6) 
$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = F(x) = f(x).$$

D'autre part, les égalités (3) et (5) donnent

$$F(z_n) = \sum_{r=1}^n x\left(\frac{r}{n}\right) \cdot \left[g\left(\frac{r}{n}\right) - g\left(\frac{r-1}{n}\right)\right],$$

donc, comme  $x(t) \subset (C)$  et g(t) est une fonction à variation bornée,  $\lim_{n \to \infty} F(z_n) = \int_0^1 x(t) dg$ , d'où en vertu de (6):

(7) 
$$f(x) = \int_0^1 x(t) dy \quad \text{pour tout } x(t) \subset (C).$$

Comme par conséquent

$$|f(x)| = \left| \int_{0}^{1} x(t) dg \right| \leq \underset{0 \leq t \leq 1}{\text{variation }} g(t) \underset{0 \leq t \leq 1}{\text{max}} |x(t)|,$$

on a selon (4), en posant  $|f| = |f|_{(C)}$ :

$$\underset{0 \le t \le 1}{\text{variation}} \ g(t) = |f|.$$

Nous avons ainsi obtenu le théorème (1):

Toute fonctionnelle linéaire définie dans l'espace (C) est de la forme

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dg,$$

où g(t) est une fonction indépendante de x(t) à variation |f|.

Réciproquement, étant donnée une fonction g(t) à variation bornée, la fonctionnelle f(x) définie par (7) est évidemment linéaire.

2. Espace  $(L^{(r)})$  où  $r \ge 1$ . Etant donnée une fonctionnelle linéaire f(x) définie dans l'espace  $(L^{(r)})$ , posons:

$$\xi_t = \xi_t(u) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \le u \le t, \\ 0 & \text{pour} \quad t < u \le 1, \end{cases}$$

et

$$f(\xi_t) = g(t).$$

Nous allons montrer que g(t) est une fonction absolument continue. En effet, soient  $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$  des intervalles n'empiétant pas l'un sur l'autre à extrémités respectives  $t_i$  et  $t'_i$  où  $t_i < t'_i$  et i = 1, 2, ..., n. En posant  $\varepsilon_i = \text{sign}[g(t'_i) - g(t_i)]$ , on a

(8) 
$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_{i}') - g(t_{i})| = \sum_{i=1}^{n} \{g(t_{i}') - g(t_{i})\} \varepsilon_{i}$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} \left\{ \xi'_{t_i} - \xi_{t_i} \right\} \varepsilon_i \right) \leqslant \|f\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} \left\{ \xi'_{t_i} - \xi_{t_i} \right\} \varepsilon_i \right\|.$$

La fonction  $(\xi'_{ii} - \xi_{ii}) \epsilon_i$  prenant dans l'intervalle  $\delta_i$  la valeur  $\epsilon_i = \pm 1$  et s'annulant ailleurs, il vient en vertu de l'hypothèse que les intervalles  $\delta_i$  n'empiètent pas l'un sur l'autre

$$\left\|\sum_{i=1}^n \left(\xi'_{t_i} - \xi_{t_i}\right) \varepsilon_t\right\| = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n |\delta_i|},$$

<sup>(1)</sup> Qui a été démontré pour la première fois par F. Riesz (Sur les opérations fonctionnelles linéaires, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris 149 (1909), p. 947-977).

où  $|\delta_i|$  désigne la longueur de  $\delta_i$ . On a donc, d'après (8),

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i') - g(t_i)| \leq |f| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\delta_i|},$$

ce qui prouve la continuité absolue de g(t).

Ceci établi, posons  $g'(t) = \alpha(t)$ . La fonction  $\alpha(t)$  est intégrable et, comme  $\xi_0 = 0$ , on a évidemment  $f(\xi_t) = \int_0^t \alpha(t) dt$ , d'où

(9) 
$$f(\xi_t) = \int_0^1 \xi_t(u) \alpha(u) du.$$

Soient  $c_1, c_2, ..., c_n$  des nombres arbitraires,  $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$  et  $x(t) = c_i$  pour  $t_{i-1} \le t < t_i$  et i = 1, 2, ..., n. On a évidemment  $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}})$ , d'où selon (9)

(10) 
$$f(x) = \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt.$$

Ainsi l'égalité (10) est remplie pour toute fonction "en escalier" x(t). Si x = x(t) est à présent une fonction quelconque mesurable et bornée, il existe une suite  $\{x_n(t)\}$  de fonctions "en escalier" bornées dans leur ensemble et tendant presque partout vers x(t). Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}|x_{n}(t)-x(t)|^{r}dt=0, \quad \text{d'où} \quad \lim_{n\to\infty}\|x_{n}-x\|=0$$

et, selon (10),

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 x_n(t) \alpha(t) dt = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt.$$

Ainsi l'égalité (10) est remplie pour toute fonction x(t) mesurable et bornée. fonction x(t) mesurable et bornée.

Ceci établi, considérons d'abord le cas où r > 1.

Posons:

$$x_n(t) = \begin{cases} |\alpha(t)|^{s-1} \cdot \operatorname{sign} \alpha(t) & \text{pour} \quad |\alpha(t)|^{s-1} \leq n, \\ n \cdot \operatorname{sign} \alpha(t) & \text{pour} \quad |\alpha(t)|^{s-1} > n, \end{cases}$$

où 1/r + 1/s = 1. On a  $|f(x_n)| = \left| \int_0^1 x_n(t) \alpha(t) dt \right| \le |f| \cdot \sqrt{\int_0^1 |x_n(t)|^r dt}$  et comme  $x_n(t) \alpha(t) = |x_n(t)| \cdot |\alpha(t)| \ge |x_n(t)| \cdot |x_n(t)|^{1/(s-1)}$ , on a

$$\int_{0}^{1} |x_{n}(t)|^{s/(s-1)} dt \leq |f| \sqrt{\int_{0}^{1} |x_{n}(t)|^{r} dt},$$

d'où, en tenant compte que  $\frac{s}{s-1}=r$ , on tire  $(\int_0^1 |x_n(t)|^r dt)^{1-1/r} \leqslant |f|$ . Comme cette inégalité subsiste pour tout n naturel et comme  $|x_n(t)|^r \leqslant |\alpha(t)|^{rs-r} = |\alpha(t)|^s$  et presque partout  $\lim_{n\to\infty} |x_n(t)|^r = |\alpha(t)|^s$ , on obtient

(11) 
$$\sqrt[s]{\int_{0}^{1} |\alpha(t)|^{s} dt} \leq |f|,$$

de sorte que  $\alpha(t)$  est une fonction à s-ième puissance sommable. Par conséquent, si x(t) est une fonction mesurable arbitraire à r-ième puissance sommable, le produit  $x(t)\alpha(t)$  est évidemment une fonction intégrable.

Définissons à présent la suite  $\{x_n(t)\}$  comme il suit:

(12) 
$$x_n = x_n(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } |x(t)| \leq n, \\ n \text{ sign } x(t) & \text{pour } |x(t)| > n. \end{cases}$$

On a alors

(13) 
$$\|x-x_n\| = \sqrt{\int_0^1 |x(t)-x_n(t)|^r dt} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|x-x_n\| = 0,$$

de sorte que

$$\left| \int_{0}^{1} x(t) \alpha(t) dt - f(x_{n}) \right| = \left| \int_{0}^{1} \left[ x(t) - x_{n}(t) \right] \alpha(t) dt \right|$$

$$\leq \sqrt{\int_{0}^{1} |x(t) - x_{n}(t)|^{r} dt} \cdot \sqrt[s]{\int_{0}^{1} |\alpha(t)|^{s} dt},$$

d'où, selon (13),  $f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt$  et comme  $|f(x)| = \left| \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt \right| \leqslant s \int_0^1 |\alpha(t)|^s dt \cdot ||x||,$ 

la formule (11) donne l'égalité

$$|f| = \sqrt[3]{\int\limits_0^1 |\alpha(t)|^s dt}.$$

Nous avons ainsi démontré le théorème (1):

<sup>(1)</sup> Pour r=2 ce théorème a été établi par M. Fréchet (Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris 144 (1907), p. 1414-1416) et dans le cas général par F. Riesz, l. c., Mathematische Annalen 69 (1910), p. 449-497, v. p. 475.

73

Toute fonctionnelle linéaire f(x) définie dans l'espace  $(L^{(r)})$  où r>1 est de la forme

$$f(x) = \int_{0}^{1} x(t) \alpha(t) dt$$

οù

$$\alpha(t) \subset (L^{(s)})$$
 et  $|f| = \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s dt}$ .

Passons maintenant au cas où r = 1. Soient  $0 \le u < u + h \le 1$  et

$$x(t) = \begin{cases} 1/h & \text{pour} \quad u \leq t \leq u + h, \\ 0 & \text{pour} \quad 0 \leq t < u \text{ et } u + h < t \leq 1. \end{cases}$$

On a, selon (10),  $|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t) \alpha(t) dt\right| = \frac{1}{h} \left|\int_u^{u+h} \alpha(t) dt\right|$  et comme  $|f(x)| \le |f| \cdot ||x|| = |f| \cdot 1$ , il vient  $\left|\int_u^{u+h} \alpha(t) dt\right| \le |f| \cdot h$ . La fonction  $g(u) = \int_0^u \alpha(t) dt$  satisfait donc à la condition de Lipschitz et comme on a presque partout  $g'(t) = \alpha(t)$ , on en conclut que

(14) 
$$|\alpha(t)| \le |f|$$
 presque partout.

Si à présent x = x(t) est une fonction intégrable quelconque et la suite  $\{x_n(t)\}$  est définie par les formules (12), on a

$$||x-x_n|| = \int_0^1 |x(t)-x_n(t)| dt \to 0,$$

d'où

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 x_n(t) \alpha(t) dt = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt,$$

puisque  $|x_n(t)\alpha(t)| \le |x(t)\alpha(t)|$ . Or, comme

$$\left|\int_{0}^{1} x(t)\alpha(t)dt\right| \leq \int_{0}^{1} |x(t)|dt \cdot \underset{0 \leq t \leq 1}{\operatorname{vrai max}} |\alpha(t)|,$$

on obtient en vertu de (14) l'égalité

$$|f| = \operatorname{vrai}_{0 \le t \le 1} \max |\alpha(t)|.$$

Nous avons ainsi démontré le théorème (1):



$$f(x) = \int_{0}^{1} x(t) \alpha(t) dt,$$

où  $\alpha(t)$  est une fonction bornée presque partout et  $|f| = \underset{0 \le t \le 1}{\text{vrai max}} |x(t)|$ .

3. Espace (c). Soient

(15) 
$$\begin{aligned} \xi_i^n &= \begin{cases} 1 & \text{pour } n = i, \\ 0 & \text{pour } n \neq i, \end{cases} \\ x_n &= \{\xi_i^n\} & \text{et } x' = \{\xi_i^i\}. \end{aligned}$$

Etant donnée une fonctionnelle linéaire f(x) où  $x = \{\xi_n\} \subset (c)$ , posons

(16) 
$$f(x_n) = C_n \quad \text{et} \quad f(x') = C',$$

En posant  $\alpha = \lim_{n \to \infty} \xi_n$ , on a donc

$$||x-\alpha x'-\sum_{n=1}^{r}(\xi_{n}-\alpha)x_{n}|| = \text{borne sup } |\xi_{n}-\alpha|,$$

d'où

$$x = \alpha x' + \lim_{r \to \infty} \sum_{n=1}^{r} (\xi_n - \alpha) x_n$$

et par conséquent

$$x = \alpha x' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) x_n.$$

Donc

$$f(x) = \alpha \cdot f(x') + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) \cdot f(x_n),$$

d'où selon (16)

(17) 
$$f(x) = \alpha C' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) \cdot C_n.$$

Si  $x = \{\xi_n\}$  est à présent la suite où

$$\xi_n = \begin{cases} \operatorname{sign} C_n & \operatorname{pour} & n \leq r, \\ 0 & \operatorname{pour} & n > r, \end{cases}$$

on a 
$$||x|| = 1$$
,  $\alpha = \lim_{n \to \infty} \xi_n = 0$  et  $f(x) = \sum_{n=1}^r |C_n|$ , et comme  $|f(x)| \le |f| \cdot ||x||$ ,

<sup>(1)</sup> Cr théorème a été démontré pour la première fois par M. H. Steinhaus (Additive und stetige Funktionaloperationen, Mathematische Zeitschrift 5 (1918), p. 186-221).

75

il vient  $\sum_{n=1}^{r} |C_n| \le |f|$ . Le nombre r étant arbitraire, il en résulte que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$  est convergente. En posant

$$C'-\sum_{n=1}^{\infty}C_n=C,$$

on a d'une façon générale selon (17)

(18) 
$$f(x) = \alpha C + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n \quad \text{où} \quad \alpha = \lim_{n \to \infty} \xi_n.$$

Soit à présent

$$\xi_n = \begin{cases} \operatorname{sign} C_n & \operatorname{pour} \quad n \leq r, \\ \operatorname{sign} C & \operatorname{pour} \quad n > r. \end{cases}$$

Alors ||x|| = 1,  $\alpha = \lim_{n \to \infty} \xi_n = \operatorname{sign} C$  et

$$f(x) = |C| + \sum_{n=1}^{r} |C_n| + \sum_{n=r+1}^{\infty} |C_n| \cdot \text{sign } C \le |f|$$

et, cette inégalité subsistant pour tout r naturel, on obtient

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \leqslant |f|.$$

Comme d'autre part

$$f(x) \leq \left[|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|\right] \cdot |x|,$$

il en résulte que l'on a l'égalité

(19) 
$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| = |f|.$$

Conformément aux formules (18) et (19), le théorème suivant se trouve ainsi établi:

Toute fonctionnelle linéaire f(x) où  $x = \{\xi_n\}$  définie dans (c) est de la forme

$$f(x) = C \lim_{n \to \infty} \xi_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n$$

et on a

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| = |f|.$$

4. Espace  $(l^{(r)})$  où  $r \ge 1$ . Soit, comme auparavant,  $x_n = \{\xi_i^n\}$  où  $\xi_i^n$  sont définis par la formule (15). On a donc pour  $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(r)})$  arbitraire

$$||x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i|| = \sqrt[r]{\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^r} \to 0,$$

ďoù

$$(20) x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i.$$

Etant donnée une fonctionnelle linéaire f(x) définie dans  $(l^{(r)})$ , posons  $f(x_i) = C_i$ , d'où selon (20)

(21) 
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i C_i.$$

Considérons d'abord le cas où r = 1.

Soient  $\xi_n = \text{sign } C_n$  et  $\xi_i = 0$  pour  $i \neq n$ . On alors  $f(x) = |C_n| \leq |f|$ . D'autre part, on a pour toute suite  $x = \{\xi_i\} \subset (I)$  l'inégalité  $|f(x)| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|)$  borne  $\sup_{1 \leq i < \infty} |C_i|$  et par conséquent  $|f| = \text{borne } \sup_{1 \leq i < \infty} |C_i|$ .

Nous avons donc démontré le théorème:

Toute fonctionnelle linéaire f(x) où  $x = \{\xi_i\}$  définie dans (l) est de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i$$

 $ou |f| = borne \sup_{1 \le i < \infty} |C_i|.$ 

Passons au cas où r > 1. Soit  $x^0 = \{\xi_i^0\}$  où

$$\xi_i^0 = \begin{cases} |C_i|^{s-1} \cdot \text{sign } C_i & \text{pour } i \leq n, \\ 0 & \text{pour } i > n \end{cases}$$

et 1/r + 1/s = 1. On a alors

$$||x^0|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^{rs-r}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^s},$$

d'où, selon (21),

$$f(x^0) = \sum_{i=1}^n |C_i|^a \le |f| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |C_i|^s},$$

donc

$$\int_{i=1}^{n} |C_i|^s \leqslant |f|$$

et, n étant arbitraire,

$$\sqrt[3]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s} \leqslant |f|.$$

D'autre part, pour toute suite  $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(r)})$  on a

$$|f(x)| = \Big|\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i C_i\Big| \leqslant \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^r} \cdot \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s},$$

d'où finalement l'égalité

$$|f| = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s}.$$

Nous avons ainsi démontré le théorème:

Toute fonctionnelle linéaire f(x) définie dans l'espace  $(l^{(r)})$  où r > 1 est de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \, \xi_i \quad \text{où} \quad x = \{\xi_i\}$$

et on a

$$|f| = \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s}$$
 où  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ .

5. Espace (m) et ses sous-espaces vectoriels séparables. Soit E un espace vectoriel séparable situé dans (m); les éléments de E sont donc suites bornées de nombres. Admettons dans E la même norme que dans (m), à savoir

$$|x| = \text{borne sup } |\xi_i| \quad \text{où} \quad x = \{\xi_i\} \subset E.$$

Soit  $\{x_n\}$  où  $x_n = \{\xi_i^n\}$  la suite d'éléments de E qui forment l'ensemble dénombrable dense dans E. Considérons d'abord  $x_1$  et  $x_2$ . Nous allons établir pour tout  $\varepsilon_2 > 0$  l'existence d'un tel  $k_2$  naturel que l'on ait pour tout couple  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de nombre réels:

$$(22) |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant k_2} |\lambda_1 \xi_i^1 + \lambda_2 \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2).$$

Ecartons, en effet, le cas de la proportionnalité des nombres  $\xi_i^1$  et  $\xi_i^2$  comme trivial et supposons, par contre, qu'il existe pour tout k naturel un couple  $\lambda_1^k$  et  $\lambda_2^k$  tel que

$$|\lambda_1^k x_1 + \lambda_2^k x_2| > \max_{1 \le i \le k} |\lambda_1^k \xi_i^1 + \lambda_2^k \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2).$$

En désignant par  $m_k$  celui des nombres  $|\lambda_1^k|$  et  $|\lambda_2^k|$  qui est plus grand et en posant  $l_1^k = \lambda_1^k/m_k$  et  $l_2^k = \lambda_2^k/m_k$ , on aurait donc

(23) 
$$|l_1^k x_1 + l_2^k x_2| > \max_{1 \le i \le k} |l_1^k \xi_i^1 + l_2^k \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2).$$

Comme on a  $1 \le |l_1^k| + |l_2^k| \le 2$  pour tout k naturel, on peut extraire des suites  $\{l_1^k\}$  et  $\{l_2^k\}$  des suites convergentes. Il existe par conséquent une suite  $\{k_j\}$  telle que les suites  $\{l_1^k\}$  et  $\{l_2^k\}$  convergent respectivement vers certains nombres  $l_1$  et  $l_2$  où  $1 \le |l_1| + |l_2| \le 2$ . Comme  $\lim_{j \to \infty} k_j = +\infty$  et en outre

$$\lim_{l\to\infty} |(l_1 x_1 + l_2 x_2) - (l_1^{k_j} x_1 + l_2^{k_j} x_2)| = 0,$$

on aurait donc, en vertu de (23),

$$|l_1 x_1 + l_2 x_2| \geqslant \max_{1 \le i \le \infty} |l_1 \xi_i^1 + l_2 \xi_i^2| \cdot (1 + \varepsilon_2),$$

ce qui est impossible, car on a par définition

$$|l_1 x_1 + l_2 x_2| = \text{borne sup } |l_1 \xi_i^1 + l_2 \xi_i^2|.$$

L'existence d'un  $k_2$  naturel satisfaisant pour tout  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  à (22) étant ainsi démontrée, on en déduit aisément par induction que,  $\{\varepsilon_n\}$  étant une suite arbitrairement donnée de nombres positifs, il existe pour tout n > 1 un  $k_n$  naturel tel que pour toute suite finie  $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$  de nombres réels on a

$$(24) \quad |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n| \leq \max_{1 \leq i \leq k_n} |\lambda_1 \xi_i^1 + \lambda_2 \xi_i^2 + \ldots + \lambda_n \xi_i^n| \cdot (1 + \varepsilon_n).$$

Ceci établi, désignons pour tout n naturel donné par  $x_i'$ , où i = 1, 2, ..., n, la suite

(25) 
$$\xi_1^i, \xi_2^i, ..., \xi_{k_n}^i, 0, 0, 0, ...;$$

on a donc en vertu de (24) pour  $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$  arbitraires

$$(26) |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n| \leq |\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + \ldots + \lambda_n x_n'| \cdot (1 + \varepsilon_n).$$

Soit à présent f(x) une fonctionnelle linéaire définie dans E. Donc  $|f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n)| \le |f| \cdot |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n|$ , et par conséquent selon (26),  $|\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n)| \le |f| \cdot (1 + \epsilon_n) \cdot |\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2' + ... + \lambda_n x_n'|$ . Comme par définition de  $x_i'$  (voir (25)) on a  $x_i' \in (c)$ , il existe en vertu du théorème 5, p. 66, une fonctionnelle linéaire  $f_n(x)$  définie dans  $f_n(x)$  definie dans  $f_n(x)$ 

$$f_n(x_i) = f(x_i)$$
 pour tout  $i = 1, 2, ..., n$  et  $|f_n| \le |f| \cdot (1 + \varepsilon_n)$ .

En tenant compte de la forme générale des fonctionnelles linéaire dans l'espace (c), établie p. 74, et tous les termes des suites  $x_i'$  où i=1,2,...,n étant d'après (25) des zéros pour les indices supérieurs à  $k_n$ , on conclut qu'il existe une suite finie de nombres  $a_{n_1}a_{n_2}...a_{nk_n}$  assujettie aux conditions:

$$\sum_{i=1}^{k_n} a_{nj} \, \xi_j^i = f_n(x_i^i) = f(x_i) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, ..., n$$

et

$$\sum_{j=1}^{k_n} |a_{nj}| = |f_n| \leqslant |f| \cdot (1 + \varepsilon_n),$$

d'où, en posant

(27) 
$$\alpha_{nj} = \begin{cases} \frac{a_{nj}}{1 + \varepsilon_n} & \text{pour } j \leq k_n, \\ 0 & \text{pour } j > k_n, \end{cases}$$

on obtient

(28) 
$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} \xi_j^i = \frac{1}{1 + \varepsilon_n} f(x_i) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, ..., n,$$

et

(29) 
$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{nj}| \leqslant |f|.$$

Admettons que la suite  $\{\varepsilon_n\}$  ait été choisie de façon à avoir  $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ .

En vertu de (28) on a alors  $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} \xi_j^i = f(x_i)$  pour i=1,2,..., et nous allons montrer, sans altérer la suite double infinie  $\{\alpha_{nj}\}$ , que cette forme se laisse généraliser de  $x_i$  sur tout  $x \subset E$ .

Posons à ce but  $x = \{\xi_i\}$ . La suite d'éléments de la forme  $x_n = \{\xi_i^n\}$  étant définie au début comme dense E, il existe pour tout  $\varepsilon > 0$  un  $x_i = \{\xi_i^n\}$  tel que  $|x - x_i| < \varepsilon$ , d'où

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} \xi_j - f(x)\right| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} (\xi_j - \xi_j^i)\right| + \left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} \xi_j^i - f(x_i)\right| + |f(x_i) - f(x)|$$

et comme

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj}(\xi_j - \xi_j^i)\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{nj}|\right) \cdot |x - x_i| \leq |f| \cdot \varepsilon,$$

on a pour n suffisamment grand

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} \xi_j - f(x)\right| \leq |f| \cdot \varepsilon + \varepsilon + |f| \cdot \varepsilon = (2|f| + 1) \cdot \varepsilon$$

et par conséquent la forme généralisée

(30) 
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{nj}\,\xi_j=f(x)\quad\text{pour tout }x=\{\xi_j\}\subset E.$$

Enfin, nous allons montrer que

(31) 
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{nj}|=|f|.$$

n

En effet, si l'on pose

(32) 
$$M = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{nj}|,$$

on a selon (30),  $|f(x)| \le M \cdot \underset{1 \le j < \infty}{\text{borne sup}} |\xi_j| = M \cdot |x|$ , pour tout  $x \subseteq E$ , d'où, |f| étant le plus petit nombre tel que  $|f(x)| \le |f| \cdot |x|$  pour tout  $x \subseteq E$ , on conclut que  $|f| \le M$ , ce qui donne en vertu de (32) et (29) l'égalité (31).

Recueillons à présent les formules (27), (29), (30) et (31): nous voyons que le théorème suivant se trouve etabli (1):

Toute fonctionnelle linéaire f(x) définie dans un espace vectoriel séparable E situé dans l'espace (m) est de la forme

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj} \, \xi_j$$

où  $x=\{\xi_j\}$  et  $\{\alpha_{nj}\}$  est un tableau de nombres réels satisfaisant aux conditions:

1°  $\alpha_{nj} = 0$  pour  $j > k_n$  où  $\{k_n\}$  est une suite de nombres naturels,

$$2^{\circ} \sum_{j=1} |\alpha_{nj}| \leq |f| \text{ pour } n = 1, 2, ...,$$

$$3^{\circ} \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{nj}| = |f|.$$

# § 5. Suites fermées et complètes dans les espaces (C), $(L^{(r)})$ , (c) et $(l^{(r)})$

Nous allons appliquer à présent les résultats qui précèdent à plusieurs notions et problèmes liés avec les propriétés des espaces particuliers que nous venons de considérer.

Une suite de fonctions  $\{x_n(t)\}$  où  $x_n(t) \subset (C)$  et  $0 \le t \le 1$  est dite fermée dans (C), lorsqu'il existe pour toute fonction  $x(t) \subset (C)$  une suite de combinaisons linéaires  $\{\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} x_i(t)\}$  tendant uniformément vers x(t).

La suite  $\{x_n(t)\}$  s'appelle complète dans (C), lorsque, g(t) étant une fonction quelconque à variation bornée, les conditions  $\int_0^1 x_n(t) dg = 0$  pour tout  $n = 1, 2, \ldots$  entraînent l'égalité g(0) = g(t) = g(1), excepté un ensemble au plus dénombrable de valeurs de t.

Une suite de fonctions  $\{x_n(t)\}$  où  $x_n(t) \subset (L^{(r)})$  et  $0 \le t \le 1$  est dite

<sup>(1)</sup> Ce théorème est dû à M. S. Mazur.

fermée dans  $(L^{(r)})$ , lorsqu'il existe pour toute fonction  $x(t) \subset (L^{(r)})$  une suite  $\{g_n\}$  de fonctions de la forme

$$g_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} x_i(t)$$

convergente en moyenne avec la r-ième puissance vers x(t), c.-à-d. telle que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|x(t)-g_n(t)|^rdt=0.$$

La suite  $\{x_n(t)\}$  s'appelle complète dans  $(L^{(r)})$ , lorsque, g(t) étant une fonction arbitraire qui est mesurable et bornée ou qui appartient à  $(L^{(s)})$  où 1/r+1/s=1, suivant que r=1 ou r>1, les conditions

$$\int_{0}^{1} x_{n}(t)g(t)dt = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, ...$$

entraînent presque partout l'égalité g(t) = 0.

Les deux notions interviennent dans la théorie des séries orthogonales.

Il est facile de voir que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de fonctions soit fermée dans (C), resp. dans  $(L^{(r)})$ , est qu'elle soit fondamentale (dans le sens défini au  $\S$  3, p. 67, de ce chapitre). De même, pour qu'elle soit complète, il faut et il suffit qu'elle soit totale (dans le sens défini *ibidem*). Il suffit, en effet, de rappeler la forme générale des fonctionnelles linéaires dans (C), resp.  $(L^{(r)})$ , établie p. 69, resp. 72–73.

Enfin, le théorème 7, p. 67, implique aussitôt que pour qu'une suite de fonctions soit complète dans (C), resp. dans  $(L^{(r)})$ , il faut et il suffit qu'elle y soit fermée.

En procédant d'une façon analogue, on peut établir les notions de suites fermées et de suites complètes pour les espaces (c) et  $(l^{(r)})$ .

# § 6. Approximation des fonctions appartenant à (C) et $(L^{(r)})$ par des combinaisons linéaires de fonctions

Aussi le théorème 6, p. 67, est susceptible d'interprétation dans divers espaces normés particuliers. En voici deux exemples:

- 1. Espace (C). Pour qu'il existe des polynômes formés de termes de la suite  $\{x_n(t)\}$  où  $x_n(t) \subset (C)$  et  $0 \le t \le 1$  qui approchent uniformément une fonction donnée  $x(t) \subset (C)$ , il faut et il suffit que, g(t) étant une fonction quelconque à variation bornée, les conditions  $\int\limits_0^1 x_n(t)\,dg=0$  pour  $n=1,2,\ldots$  entraînent l'égalité  $\int\limits_0^1 x(t)\,dg=0$ .
  - 2. Espaces (L'r). Pour qu'il existe des combinaisons linéaires formées de

termes de la suite  $\{x_n(t)\}$  où  $x_n(t) \subset (L^{(r)})$  et  $0 \le t \le 1$  qui approchent avec la r-ième puissance en moyenne une fonction donnée  $x(t) \subset (L^{(r)})$ , il faut et il suffit que, g(t) étant une fonction arbitraire, mesurable et bornée lorsque r=1 et appartenant à  $(L^{(s)})$  où 1/r+1/s=1 lorsque r>1, les conditions  $\int\limits_0^1 g(t)x_n(t)\,dt=0$  pour  $n=1,2,\ldots$  entraı̂nent l'égalité  $\int\limits_0^1 g(t)x(t)\,dt=0$ .

### § 7. Le problème des moments

Passons aux applications du théorème 5, p. 66.

On a donné le nom du problème des moments au problème qui consiste à établir des conditions pour l'existence d'une fonction f satisfaisant à l'infinité d'équations

(33) 
$$\int_{a}^{b} f \varphi_{i} dt = c_{i} \quad \text{où} \quad i = 1, 2, ...,$$

pour une suite de fonctions  $\{\varphi_i\}$  et une suite de nombres  $\{c_i\}$  données d'avance.

Nous donnons ici la solution de ce problème dans deux cas particuliers d'espaces normés: elle s'obtient par l'interprétation convenable du théorème 5, p. 66, dans ces espaces.

I. Espace (C). Soit  $x_i = x_i(t)$  où  $0 \le t \le 1$  une fonction continue. Toute fonctionnelle linéaire f(x) dans (C) étant (cf. p. 69) de la forme  $f(x) = \int_0^1 x(t) dy$  où variation g(t) = |f|, on obtient du théorème 5, p. 66, le théorème (1):

Pour qu'il existe une fonction g(t) à la

$$\underset{0 \le t \le 1}{\text{variation }} g(t) \le M$$

et satisfaisant aux équations

$$\int_{0}^{1} x_{i}(t) dg = c_{i} \quad pour \quad i = 1, 2, ...,$$

il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite finie  $h_1,h_2,\ldots,h_r$  de nombres réels

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_{i} c_{i}\right| \leq M \cdot \max_{0 \leq r \leq 1} \left|\sum_{i=1}^{r} h_{i} x_{i}(t)\right|.$$

<sup>(1)</sup> Ce théorème a été trouvé par F. Riesz (cf. les travaux de F. Riesz et de E. Helly cités ici p. 65, note (1)).

<sup>6 -</sup> Ocuvres t. II

II. Espace  $(L^{(r)})$ . Pour r > 1 on parvient, en procédant d'une façon analogue, au théorème  $\binom{1}{r}$ :

Pour qu'il existe une fonction  $\alpha(t)$  où  $0 \le t \le 1$  telle que

$$\int_{0}^{1} |\alpha(t)|^{s} dt \leq M^{s} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$$

et qui remplisse les équations

$$\int_{0}^{1} x_{i}(t)\alpha(t) dt = c_{i} \quad ou \quad x_{i}(t) \subset (L^{(r)}) \text{ et } i = 1, 2, ...,$$

il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite finie  $h_1, h_2, ..., h_k$  de nombres réels

$$\left|\sum_{i=1}^k h_i c_i\right| \leqslant M \cdot \sqrt[r]{\int\limits_0^1 \left|\sum_{i=1}^k h_i x_i(t)\right|^r dt}.$$

Pour r=1, les fonctions  $x_i(t)$  sont intégrables et la fonction cherchée  $\alpha(t)$  est bornée et telle que

$$\underset{0 \leq t \leq 1}{\operatorname{vrai}} \max_{0 \leq t \leq 1} |\alpha(t)| \leq M.$$

La condition nécessaire et suffisante est alors la suivante:

$$\left|\sum_{i=1}^k h_i c_i\right| \leqslant M \cdot \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^k h_i x_i(t)\right| dt.$$

# § 8. Conditions pour l'existence des solutions de certains systèmes d'équations à une infinité d'inconnues

Considérons un autre problème.

Etant donnés un tableau  $\{\alpha_{ik}\}$  et une suite  $\{c_i\}$  de nombres, nous allons chercher d'établir des conditions pour l'existence d'une suite de nombres  $\{z_i\}$  satisfaisant à l'infinité d'équations

(34) 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} z_k = c_i \quad \text{où} \quad i = 1, 2, ...$$

Nous donnons ici, également à l'aide du théorème 5, p. 66, la solution de ce problème dans deux cas particuliers d'espaces:

III. Espace (c). Soient 
$$x_i = \{\alpha_{ik}\}$$
 et

(35) 
$$\lim_{k \to \infty} \alpha_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, ...$$

Toute fonctionnelle linéaire dans l'espace (c) étant de la forme f(x) =  $C \lim_{i \to \infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i$  où  $x = \{\xi_i\}$  et  $|f| = |C| + \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|$  (cf. p. 74), le théorème 5, p. 66, donne en vertu de (35) l'énoncé suivant:

Pour qu'il existe une suite de nombres  $\{z_k\}$  qui remplisse les équations (34) en même temps que la condition  $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k| \leq M$ , il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite finie de nombres  $h_1, h_2, \ldots, h_r$  l'inégalité

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_{i} c_{i}\right| \leq M \cdot \text{borne sup } \left|\sum_{i=1}^{r} h_{i} \alpha_{ik}\right|.$$

IV. Espace (l). Soient  $x_i = \{\alpha_{ik}\}$  et  $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}| < \infty$  pour i = 1, 2, ... Toute fonctionnelle linéaire dans (l) étant de la forme  $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \xi_i$  où  $x = \{\xi_i\}$  et  $|f| = \text{borne sup } |z_i|$  (cf. p. 75), le théorème 5, p. 66 donne immédiatement l'énoncé suivant:

Pour qu'il existe une suite bornée  $\{z_k\}$  qui remplisse les équations (34) en même temps que la condition borne  $\sup_{1 \le k < \infty} |z_k| \le M$ , il faut et il suffit que l'on ait pour toute suite finie de nombres réels  $h_1, h_2, ..., h_r$  l'inégalité

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i c_i\right| \leq M \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{i=1}^{r} h_i \alpha_{ik}\right|.$$

<sup>(1)</sup> Ce théorème est dû également à F. Riesz, l. c.



#### CHAPITRE V

# Espaces du type (B)

## § 1. Opérations linéaires dans les espaces du type (B)

Nous allons établir ici quelques théorèmes généraux sur les espaces E du type  $(B)(^1)$ , dans lesquels leur propriété qu'ils sont non seulement normés, mais aussi *complets*, intervient d'une façon essentielle.

THÉORÈME 1. F(x) étant une opération mesurable (B) et U(x) une opération additive, définies toutes les deux dans E et telles que  $|F(x)| \ge |U(x)|$  pour tout  $x \subseteq E$ , l'opération U(x) est linéaire.

Démonstration. Il existe en vertu du théorème 4 de l'Introduction p. 35, un ensemble  $H \subset E$  de I-e catégorie tel que l'opération F(x) est continue dans E-H. Il existe par conséquent pour  $x_0 \subset E-H$  un r>0 et un M>0 tels que

(1)  $|x-x_0| \le r$  entraı̂ne  $|U(x)| \le |F(x)| \le M$  pour tout  $x \subset E-H$ .

L'ensemble des points  $x \subset E-H$  tels que  $|x-x_0| \le r/2$  étant de II-e catégorie, il en est à plus forte raison de même de l'ensemble G de tous les points de la forme x'+x où |x'| < r/2,  $x \subset E-H$  et  $|x-x_0| \le r/2$ . Il existe donc dans G un élément  $x'+x_1 \subset E-H$  où  $x_1 \subset E-H$ . Comme  $|x_1-x_0| \le r/2$ , on a  $|x'+x_1-x_0| \le r$ , d'où, selon (1),  $|U(x')| \le |U(x'+x_1)|+$  $+|U(x_1)| \le 2M$ . La norme de U(x) est par conséquent bornée dans la sphère  $|x| \le r/2$ , donc, évidemment dans toute sphère. Il en resulte en vertu du théorème 1 (Chapitre IV, § 2), p. 63, que l'opération U(x) est continue.

Théorème 2. Si, pour une opération additive U(x),  $\lim_{n\to\infty} x_n = x$  entraîne  $\lim_{n\to\infty} |U(x_n)| \ge |U(x)|$  pour tout  $x \subset E$ , l'opération U(x) est linéaire (2).

Démonstration. L'ensemble  $G_n$  de tous les  $x \subset E$  tels que  $|U(x)| \leq n$ 

est pour tout n = 1, 2, ... fermé et comme  $E = \sum_{n=1}^{\infty} G_n$ , un au moins des ensembles  $G_n$  contient une sphère dans laquelle la norme de U(x) est bornée, d'où, comme dans le théorème précédent, la continuité de l'opération U(x).

Théorème 3. Si une suite d'opérations linéaires  $\{U_n(x)\}$  définies dans l'espace E est convergente dans un ensemble G qui est dense dans une sphère K et si la suite des normes  $\{|U_n|\}$  est bornée, la suite des opérations  $\{U_n(x)\}$  est convergente dans l'espace E tout entier  $\binom{1}{2}$ .

Démonstration. Etant donné un  $x_0 \subset K$ , il existe par hypothèse une suite  $\{x_n\}$  telle que  $x_n \subset G$  pour n = 1, 2, ... et  $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ .

Or, on a pour trois nombres n, p et q quelconques:

$$|U_p(x_0) - U_q(x_0)| \le |U_p(x_0 - x_n)| + |U_q(x_n - x_0)| + |U_p(x_n) - U_q(x_n)|,$$

donc

$$\overline{\lim_{\substack{p\to\infty\\q\to\infty}}} |U_p(x_0) - U_q(x_0)| \leq 2M |x_0 - x_n| \quad \text{où} \quad M = \overline{\lim_{n\to\infty}} |U_p|,$$

d'où, comme  $\lim_{n\to\infty} |x_0-x_n|=0$ , on a  $\lim_{\substack{p\to\infty\\q\to\infty}} |U_p(x_0)-U_q(x_0)|=0$ , ce qui implique la convergence de la suite  $U_n(x_0)$ .

Etant donné à présent un élément arbitraire  $x \subset E$  et  $x_0'$  désignant en particulier le centre de la sphère K, il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que  $x_0' + \varepsilon x \subset K$ , donc que la suite  $U_n(x_0' + \varepsilon x)$  est convergente. La convergence de  $U_n(x)$  en résulte en vertu de celle de  $U_n(x_0')$  et de  $U_n(x_0')$ 

Théorème 4. Etant donnée une suite  $\{U_n(x)\}$  d'opérations linéaires définies dans E, l'ensemble H de tous les  $x \subset E$  pour lesquels  $\overline{\lim_{n \to \infty}} |U_n(x)| < \infty$  est soit de I-e catégorie, soit identique à  $E(^2)$ .

La démonstration résulte du théorème 1 (Chapitre III,  $\S$  1), p. 50, vu que H est un ensemble linéaire et mesurable (B).

THÉORÈME 5. Etant donnée dans E une suite  $\{U_n(x)\}$  d'opérations linéaires telles que  $\lim_{n\to\infty} |U_n(x)| < \infty$  pour tout  $x \subset E$ , la suite des normes  $\{|U_n|\}$  est bornée (3).

Démonstration. En vertu du théorème 11 de l'Introduction, p. 36, il existe une sphère  $K \subset E$  et un nombre N tels que l'on a  $|U_n(x)| \leq N$  pour tout  $x \subset K$  et n = 1, 2, ... En désignant par r le rayon de la sphére K, on en tire facilement  $|U_n| \leq 2N/r$  pour tout n = 1, 2, ...

<sup>(1)</sup> Voir la définition de ces espaces Chapitre IV, p. 63.

<sup>(2)</sup> Cf. S. Banach [7], p. 153 [ce volume, p. 308], théorème 3.

<sup>(1)</sup> Cf. S. Banach et H. Steinhaus [19], p. 53 [ce volume, p. 368].

<sup>(2)</sup> Ibidem, p. 55 [ce volume, p. 368].

<sup>(3)</sup> Ibidem, p. 57 [ce volume, p. 368].

THÉORÈME 6. Etant donnée une suite  $\{x_n\}$  d'éléments de E telle que l'on a  $\overline{\lim_{n\to\infty}} |f(x_n)| < \infty$  pour toute fonctionnelle linéaire f(x) définie dans E, la suite des normes  $\{|x_n|\}$  est bornée.

Démonstration. L'ensemble  $\overline{E}$  de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E constitue, en y conservant la définition de la norme adoptée pour ces fonctionnelles, un espace du type (B). Définissons dans  $\overline{E}$  une suite de fonctionnelles  $\{F_n\}$ , en posant  $F_n(f) = f(x_n)$  pour tout  $f \subset \overline{E}$ . L'hypothèse  $\overline{\lim_{n \to \infty}} |f(x_n)| < \infty$  entraı̂ne par conséquent  $\overline{\lim_{n \to \infty}} |F_n(f)| < \infty$  pour tout  $f \subset \overline{E}$ . En vertu du théorème 5, qui précède, il existe donc un nombre N tel que  $|F_n(f)| \le N \cdot |f|$  pour tout  $n = 1, 2, \ldots$  D'autre part comme  $x_n \subset E$ , il existe pour tout  $n = 1, 2, \ldots$  en vertu du théorème 3 (Chapitre IV, § 2), p. 64, une fonctionnelle linéaire  $f_n(x)$  définie dans E et telle que l'on a  $|f_n(x_n)| = |x_n|$  et  $|f_n| = 1$ . On a donc  $|x_n| = |f_n(x_n)| = |F_n(f_n)| \le N \cdot |f_n| = N$ , quel que soit n, c.q.f.d.

# § 2. Principe de condensation des singularités

Théorème 7. Etant donnée dans E une suite double d'opérations linéaires  $\{U_{pq}(x)\}$  telles que

(2) 
$$\overline{\lim}_{q\to\infty} |U_{pq}| = \infty \quad pour \ tout \ p = 1, 2, ...,$$

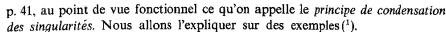
il existe un ensemble  $G \subset E$  (indépendant de p) de II-e catégorie dans E et tel que l'on a pour tout  $x \subset G$ :

(3) 
$$\overline{\lim}_{q\to\infty} |U_{pq}(x)| = \infty \quad \text{pour tout } p=1,2,...(1).$$

Démonstration. L'ensemble  $H_p$  de tous les éléments  $x \subset E$  tels que  $\overline{\lim_{q \to \infty}} |U_{pq}(x)| < \infty$  ne peut coïncider avec E, car en vertu du théorème 5, p. 85, l'hypothèse (2) se trouverait contredite. Il en résulte en vertu du théorème 4, p. 85, que  $H_p$ , et par suite l'ensemble  $H = \sum_{p=1}^{\infty} H_p$  de tous les éléments  $x \subset E$  pour lesquels la condition (3) est en défaut, est de I-e catégorie dans E. Il ne reste donc qu'à poser G = E - H.

Remarque. Les contredomaines  $E_p$  des suites  $\{U_{pq}\}$  peuvent varier avec p=1,2,..., tandis que pour p donné ils doivent évidemment être supposés identiques pour toutes les valeurs de q, puisqu'on fait intervenir dans l'énoncé du théorème 7 la notion de convergence des suites  $\{U_{pq}(x)\}$  avec q tendant vers  $\infty$ .

Le théorème 7 qui précède constitue, avec le théorème 6 (Chapitre I, § 4),



Soit  $\{g_k(t)\}$  une suite orthogonale et normée de fonctions à carré sommable dans [0, 1]. Etant donnée une fonction quelconque x(t) intégrable dans [0, 1], la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \int_0^1 g_k(s) x(s) ds$$

s'appelle le développement de la fonction x(t) suivant la suite  $\{g_k(t)\}$  (pourvu, bien entendu, que les intégrales  $\int_0^t g_k(s)x(s)ds$  existent pour tout  $k=1,2,\ldots$ ).

On a les théorèmes suivants p. ex. dans les espaces (C) et (L):

Dans (C). Etant donnée une suite  $\{t_p\}$  de points de [0,1], l'existence pour tout  $p=1,2,\ldots$  d'une fonction continue  $x_p(t)$  dont le développement dans le point  $t_p$  est divergent, resp. non borné, entraı̂ne l'existence d'une fonction continue x(t) dont le développement est divergent, resp. non borné, dans tout point  $t_p$  où  $p=1,2,\ldots$ 

La démonstration résulte du théorème 7, p. 86, et du théorème 6 (Chapitre I, § 4), p. 41, si l'on pose

$$U_{pq}(x) = \sum_{k=1}^{q} g_k(t_p) \int_{0}^{1} g_k(s) x(s) ds,$$

en regardant  $U_{pq}(x)$  comme des fonctionnelles linéaires dans (C).

Dans (L). Etant donnée une suite d'intervalles  $\{[\alpha_p,\beta_p]\}$  situés sur [0,1], l'existence pour tout  $p=1,2,\ldots$  d'une fonction intégrable  $x_p(t)$  dont le développement jouit de la propriété

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\int_{a_p}^{\beta_p}|s_n(t)|dt=\infty \quad ou \quad s_n(t)=\sum_{k=1}^ng_k(t)\int_0^1g_k(t)x_p(t)dt$$

entraı̂ne l'existence d'une fonction intégrable x(t) dont le développement jouit de la même propriété dans tous les intervalles  $[\alpha_p, \beta_p]$  à la fois.

La démonstration résulte du théorème 7, p. 86, en posant

$$U_{pq}(x) = \sum_{k=1}^{q} g_k(t) \int_0^1 g_k(t) x(t) dt$$
 pour  $\alpha_p \le t \le \beta_p$ 

et en regardant  $U_{pq}(x)$  comme des opérations linéaires définies dans l'espace des fonctions intégrables dans [0, 1] et dont les contredomaines sont situés respectivement dans les espaces des fonctions intégrables dans  $[\alpha_p, \beta_p]$ .

Remarque. En particulier, si les points à coordonnées  $\alpha_p$ ,  $\beta_p$  forment

<sup>(1)</sup> Ibidem, p. 54 [ce volume, p. 369], théorème I.

<sup>(1)</sup> Cf. ibidem, p. 56-61 [ce volume, p. 370-372].

88

un ensemble dense dans le carré [0, 1; 0, 1], la propriété en question de x(t) se présente dans tout intervalle  $[\alpha, \beta]$  de [0, 1].

En s'appuyant sur cette remarque, on peut démontrer pour les séries de Fourier l'existence d'une fonction intégrable x(t) telle que l'on ait  $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_{x}^{\beta} s_{n}(t) dt \right| = \infty \text{ dans tout intervalle } [\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi].$ 

## § 3. Espaces du type (B) compacts

Lemme. Etant donné un ensemble linéaire fermé G qui est un vrai sousensemble d'un ensemble linéaire  $D \subset E$ , il existe pour tout nombre  $\varepsilon > 0$  un  $x_0 \subset D$  tel que l'on a

$$|x_0| = 1$$
 et  $|x_0 - x| \ge 1 - \varepsilon$  pour tout  $x \subset G$ 

Démonstration. Soient:  $x' \subset D-G$ , d la distance de x' à G et  $\eta$  un nombre positif arbitraire. Il existe donc un  $y' \subset G$  tel que  $d \leq |x'-y'| \leq d+\eta$ . Posons  $x_0 = \frac{x'-y'}{|x'-y'|}$ . Pour tout  $x \subset G$  on a alors  $|x_0-x| = \frac{1}{|x'-y'|} \cdot |x'-y'-|x'-y'| \cdot x|$  et comme les relations  $x \subset G$  et  $y' \subset G$  entraı̂nent  $y'+|x'-y'| \cdot x \subset G$ , on en obtient  $|x_0-x| \geqslant \frac{1}{|x'-y'|} \cdot d \geqslant \frac{d}{d+\eta}$ , d'où, en posant  $\eta = d \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ , il vient  $|x_0-x| \geqslant 1-\varepsilon$ .

Evidemment, on a aussi  $|x_0| = |x' - y'|/|x' - y'| = 1$  et  $x_0 \subset D$ , car  $x' \subset D$  et  $y' \subset G \subset D$ .

Théorème 8. Si tout ensemble d'éléments de E dont les normes constituent un ensemble borné est compact, il existe dans E une suite finie d'éléments  $x_1, x_2, ..., x_r$  tels que tout  $x \subseteq E$  est de la forme

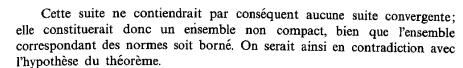
$$(4) x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r,$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$  sont des nombres (qui dépendent de x).

Démonstration. Soient:  $x_1$  un élément arbitraire de E tel que  $|x_1| = 1$  et  $x_{r+1}$ , où r > 1, un élément arbitraire de E tel que

(5) 
$$|x_{r+1}| = 1$$
 et  $|x_{r+1} - x_i| \ge \frac{1}{2}$  pour  $i = 1, 2, ..., r$ .

Désignons pour tout  $r \ge 1$  par  $G_r$  l'ensemble de tous les éléments  $x \subset E$  qui sont de la forme (4) et posons D = E. En supposant que le théorème n'est pas vrai, on aurait donc toujours  $G_r \subset D$  et  $G_r \ne D$ , d'où, selon le lemme qui précède (avec  $G = G_r$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  et  $x_0 = x_{r+1}$ ), l'existence pour tout r naturel d'un  $x_{r+1} \subset E$  assujetti à (5), c.-à-d. d'une suite infinie  $\{x_r\}$  telle que  $|x_r| = 1$  et  $|x_p - x_q| \ge \frac{1}{2}$  pour  $p \ne q$ .



## § 4. Une propriété des espaces $(L^{(r)})$ , (c) et $(l^{(r)})$

Par l'application du théorème 4 (Chapitre I, § 3), p. 40, à la forme générale des fonctionnelles linéaires définies dans ces espaces, on obtient les théorèmes suivants:

Pour  $(L^{(r)})$  où  $r \ge 1$ . Si  $\alpha(t)$ , où  $0 \le t \le 1$ , est une fonction mesurable et s'il existe pour toute fonction  $x(t) \subset (L^{(r)})$  l'intégrale  $\int\limits_0^1 x(t)\alpha(t)dt$ , alors  $\int\limits_0^1 |\alpha(t)|^{\frac{r}{r-1}} < \infty$  pour r > 1 et  $\alpha(t)$  est une fonction bornée pour r = 1  $\binom{1}{r}$ .

Démonstration. Posons pour n naturels

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{pour } |\alpha(t)| \leq n, \\ n \text{ sign } \alpha(t) & \text{pour } |\alpha(t)| > n. \end{cases}$$

Nous avons alors  $|x(t) \alpha(t)| \ge |x(t) \alpha_n(t)|$ , donc, comme  $\lim_{n \to \infty} \alpha_n(t) = \alpha(t)$ , il vient

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt=\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt\,.$$

L'expression  $\int_0^1 x(t) \alpha_n(t) dt$  étant pour tout  $n=1,2,\ldots$  une fonctionnelle linéaire dans  $(L^{(r)})$  (car  $\alpha_n(t)$  est une fonction bornée),  $\int_0^1 x(t) \alpha(t) dt$  est en vertu du théorème 4, p. 40, également une fonctionnelle linéaire. Il existe par conséquent, en vertu du théorème sur la forme générale des fonctionnelles linéaires dans les espaces  $(L^{(r)})$  où r>1 (voir p. 72), une fonction  $\overline{\alpha}(t) \subset (L^{(r-1)})$  telle que  $\int_0^1 x(t) \overline{\alpha}(t) dt = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt$  pour tout  $x(t) \subset (L^{(r)})$ . En posant donc

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq t_0, \\ 0 & \text{pour} \quad t_0 < t \leq 1, \end{cases}$$

on a  $\int_{0}^{t_0} \bar{\alpha}(t) dt = \int_{0}^{t_0} \alpha(t) dt$  pour tout  $0 \le t_0 \le 1$ , d'où presque partout  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t)$ .

<sup>(1)</sup> Pour r > 1 ce théorème est dû à M. F. Riesz.

On procède d'une façon analogue pour r = 1.

Pour (c). Si pour toute suite convergente  $x = \{\xi_i\}$  la série  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$  est convergente, on a  $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$ .

Démonstration.  $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} \xi_{i}$  étant pour tout  $n=1,2,\ldots$  une fonctionnelle linéaire dans l'espace (c) et comme  $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} \xi_{i} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i} \xi_{i}$ , on conclut du théorème 4, p. 40, que  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i} \xi_{i}$  est également une fonctionnelle linéaire. Il existe par conséquent un M>0 tel que

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i\right| \leqslant M \cdot \|x\| = M \cdot \text{borne sup } |\xi_i|.$$

En posant donc

$$\xi_i = \begin{cases} \operatorname{sign} \alpha_i & \text{pour} & i \leq n \text{ et } \alpha_i \neq 0, \\ 0 & \text{pour} & i > n \text{ ou } \alpha_i = 0, \end{cases}$$

on obtient  $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq M$  pour tout  $n = 1, 2, ..., \text{ d'où } \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \leq M$ .

Pour  $(l^{(r)})$  où  $r \ge 1$ . Si la série  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$  est convergente pour toute suite  $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(r)})$ , alors  $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^{\frac{r}{r-1}} < \infty$  pour r > 1 et la suite  $\{\alpha_i\}$  est bornée pour r = 1(1).

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

## § 5. Espaces du type (B) formés de fonctions mesurables

Nous allons nous arrêter un peu sur quelques propriétés des espaces du type (B) assujettis à des conditions plus spéciales. Admettons à ce but que E soit l'espace des fonctions mesurables définies dans l'intervalle fermé [0,1] et telles qu'on ait pour tout  $x_n = x_n(t) \subset E$  où  $0 \le t \le 1$ :

- 1.  $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = 0$  entraîne  $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ ;
- 2.  $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$  entraı̂ne l'existence dans E d'une suite partielle  $\{x_{n_i}(t)\}$

et d'un x tels que l'on ait  $|x_{ni}(t)| \le |x(t)|$  pour tout i = 1, 2, ... et pour presque tout  $0 \le t \le 1$  (| | désignant ici la valeur absolue);

3. 
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x} x_n(t) = x(t)$$
 entraı̂ne  $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| \ge ||x||$ .

Tels sont, en particulier, les espaces (M), (C) et  $(L^{(r)})$ , envisagés à plusieurs reprises (v. pages 30-32, 67-72 et 79-83); s'il s'agit de réaliser la condition 2, on n'a qu'à définir pour  $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_{n_i}|| < \infty$  la fonction x(t) par l'égalité

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{n_i}(t)|.$$

Théorème 9. Soient E et  $E_1$  deux espaces du type (B) assujettis aux conditions 1, 2 et 3 et K(s,t) une fonction défnie dans le carré [0,1;0,1]. Si l'intégrale

(6) 
$$u(s) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt$$

existe pour tout  $x \subseteq E$  et pour presque toute valeur de s et si  $u(s) \subseteq E_1$ , elle est une opération linéaire  $\binom{1}{2}$ .

Démonstration. Posons

$$\lim_{n\to\infty}||x_n-x||=0$$

et désignons par  $\{\bar{x}_n\}$  une suite quelconque extraite de  $\{x_n\}$ . En vertu de (7) et de la condition 2, il existe dans E une suite partielle  $\{\bar{x}_{n_i}-x\}$  et un  $z \in E$  tels que l'on a pour tout  $i=1,2,\ldots$  presque partout  $|\bar{x}_{n_i}(t)-x(t)| \leq z(t)$ . Evidemment  $\limsup_{i\to\infty} K(s,t)\cdot [\bar{x}_{n_i}(t)-x(t)]=0$ , et  $|K(s,t)\cdot (\bar{x}_{n_i}-x)|\leq |K(s,t)|\times$ 

 $\times z(t)$ . De plus l'intégrale  $\int_0^1 K(s,t) z(t) dt$  existe dans un ensemble H de mesure 1, car  $z \subset E$ . On a donc  $\lim_{t \to \infty} \int_0^1 K(s,t) \left[ \overline{x}_{n_i}(t) - x(t) \right] dt = 0$  et par conséquent  $\lim_{t \to \infty} \int_0^1 K(s,t) \overline{x}_{n_i}(t) dt = \int_0^1 K(s,t) x(t) dt$  pour  $s \subset H$ .

Or, toute suite extraite de  $\{u_n(s) = \int_0^s K(s,t) x_n(t) dt\}$  contenant une suite partielle qui converge presque partout vers u(s), on a  $\lim_{n \to \infty} as u_n(s) = u(s)$ , ce qui implique selon 3 et le théorème 2, p. 84, que l'opération (6) est linéaire.

<sup>(1)</sup> Ce dernier théorème a été trouvé par M. E. Landau (Über einen Konvergenzsatz, Göttinger Nachrichten 1907, p. 25-27).

<sup>(1)</sup> Cf. S. Banach, [7], p. 166 [ce volume, p. 308], théorème 2.

## § 6. Exemples des opérations linéaires dans quelques espaces particuliers du type (B)

Théorie des opérations linéaires

Nous donnons ici quelques applications du théorème 9, qui vient d'être établi, aux espaces (M), (C) et  $(L^{(r)})$ .

Espace (M). Si K(s, t) où  $0 \le s \le 1$  et  $0 \le t \le 1$  est une fonction mesurable et si pour tout s on a  $\int_0^1 |K(s, t)| dt < N < \infty$ , l'expression

(8) 
$$U(x) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt$$

est une opération linéaire définie dans (M) et dont le contredomaine est situé dans (M).

Espace (C). Si la fonction K(s,t) est continue pour  $0 \le s \le 1$  et  $0 \le t \le 1$ , l'expression (8) est une opération linéaire définie dans l'espace (C), son contredomaine étant aussi situé dans (C).

Espace (L). Si K(s, t) est une fonction mesurable dans le carré  $0 \le s \le 1$ ,  $0 \le t \le 1$  et telle que  $\int\limits_0^1 C(s) \, ds < N < \infty$  où  $C(s) = \underset{0 \le t \le 1}{\text{vrai max}} |K(s, t)|$ , l'expression (8) est une opération linéaire de domaine (L) et de contredomaine  $\subset$  (L).

Espaces  $(L^{(p)})$ . K(s, t) étant une fonction mesurable dans le carré  $0 \le s \le 1$ ,  $0 \le t \le 1$  et telle que pour tout couple de fonctions  $x(t) \subset (L^{(p)})$  et  $y(s) \subset (L^{(q-1)})$  où  $p \ge 2$  et  $q \ge 2$ , on a

(9) 
$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} |K(s,t)x(t)y(s)| \, ds \, dt < \infty,$$

l'expression (8) est une opération linéaire définie dans  $(L^{(p)})$  et dont le contredomaine est situé dans  $(L^{(q)})$ .

En effet, étant donné un  $x \subset (L^{(p)})$  quelconque, on a pour tout  $y \subset (L^{(q-1)})$ :

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} K(s,t) x(t) y(s) ds dt = \int_{0}^{1} y(s) \left[ \int_{0}^{1} K(s,t) x(t) dt \right] ds,$$

d'où (cf. p. 89)  $\int_{0}^{1} K(s, t) x(t) dt \subset (L^{(q)})$  et par conséquent, selon (8), U(x) est une opération linéaire.

Pour que la condition (9) se trouve vérifiée, il suffit d'admettre que  $\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}} ds dt < \infty$ , où r est le plus petit des nombres p et  $\frac{q}{q-1}$ 

(en particulier, que la fonction K(s, t) et bornée, lorsque r = 1, et intégrable, lorsque  $p = q = +\infty$ ).

On a, en effet, en vertu de l'inégalité de Riesz:

$$\Big| \int_0^1 \int_0^1 K(s,t) x(t) y(s) ds dt \Big|$$

$$\leq \Big\{\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}} ds \, dt \Big\}^{\frac{r-1}{r}} \cdot \Big\{\int\limits_0^1 |x(s)|^r \, ds \Big\}^{\frac{1}{r}} \cdot \Big\{\int\limits_0^1 |y(t)|^r \, dt \Big\}^{\frac{1}{r}}.$$

En particulier, pour p=q=2, la condition (9) peut donc être remplacée par  $\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^2 ds dt < \infty$ , ce qui implique que l'opération (8) est linéaire dans  $(L^{(2)})$  et que son contredomaine est également contenu dans  $(L^{(2)})$ . La même remarque s'applique aux cas où p=q=1 et  $p=q=\infty$ .

#### § 7. Quelques théorèmes sur les méthodes de sommation

Etant donné un tableau infini de nombres

(A) 
$$a_{11}, a_{12}, ..., a_{1k}, ...$$
$$a_{21}, a_{22}, ..., a_{2k}, ...$$
$$a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}, ...$$

nous dirons qu'une suite de nombres  $x = \{\xi_k\}$  est sommable (vers A(x)) par la méthode A (qui correspond au tableau (A)), lorsque chacune des séries  $A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k$  est convergente et la suite  $\{A_i(x)\}$  converge aussi (vers A(x)).

La méthode A est dite permanente, lorsque toute suite convergente est sommable par cette méthode vers sa limite. Elle s'appelle reversible, lorsqu'à toute suite convergente  $\{\eta_i\}$  vient correspondre exactement une suite x (convergente ou non) telle que  $A_i(x) = \eta_i$  pour i = 1, 2, ... Nous dirons qu'une méthode B (qui correspond au tableau (B) =  $\{\{b_{ik}\}\}\}$ ) n'est pas plus faible de A, lorsque toute suite sommable par la méthode A l'est aussi par la méthode B.

Enfin, une méthode A porte le nom de méthode parfaite, lorsqu'elle est à la fois permanente, reversible et telle que les conditions

(10) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik} = 0 \text{ pour } k = 1, 2, \dots$$

entraînent

(11) 
$$\alpha_i = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots$$

" Chapitre V. Espaces du type (B)

 $T_{\mbox{H\'{E}OR\`{E}ME}}$  10. Pour qu'une méthode A soit permanente, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies simultanément:

$$1^{\circ} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leq M \text{ pour tout } i = 1, 2, ...,$$

$$2^{\circ} \lim_{i \to \infty} a_{ik} = 0 \quad pour \quad tout \quad k = 1, 2, ...,$$

$$3^{\circ} \lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1 (1).$$

Démonstration. Nécessité. La convergence de la série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k$  pour toute suite convergente  $x = \{\xi_k\}$  et pour tout  $i = 1, 2, \ldots$  entraîne (cf. p. 90, pour (c)) la convergence absolue de la série  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ . Les fonctionnelles  $A_i(x)$ , définies dans l'espace (c), sont par conséquent linéaires et comme elles forment une suite convergente, on en conclut d'après le théorème 5, p. 85, que la condition 1° est remplie.

Soient d'autre part:  $\xi_i^0 = 1$  pour  $i = 1, 2, ..., \xi_i^n = 0$  pour  $i \neq n$  et  $\xi_n^n = 1$  pour tout n = 1, 2, ... Posons  $x_n = \{\xi_i^n\}$  pour n = 1, 2, ... On a  $A_i(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$  et  $A_i(x_n) = a_{in}$  pour i et n naturels, donc  $A(x_0) = 1$  et  $A(x_n) = 0$  pour n > 0, de sorte que les conditions  $2^\circ$  et  $3^\circ$  sont également remplies.

Suffisance des trois conditions résulte du théorème 3, p. 85, et du fait que la suite  $\{x_n\}$  définie tout à l'heure est dans l'espace (c) fondamentale.

Lemme 1. Soient A une méthode permanente et  $y_0 = \{\eta_i^0\}$  une suite convergente. Si pour toute suite de nombres  $\{\alpha_i\}$  les conditions (10) entraı̂nent l'égalité  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 0$ , il existe pour tout nombre  $\varepsilon > 0$  une suite convergente x telle que l'on a

(12) 
$$|A_i(x) - \eta_i^0| < \varepsilon \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots$$

Démonstration. Désignons par G l'ensemble de toutes les suites convergentes  $\{\eta_i\}$  auxquelles correspondent des suites convergentes x telles que  $\eta_i = A_i(x)$  pour i = 1, 2, ... Considéré dans l'espace (c), l'ensemble G ainsi défini constitue évidemment un espace vectoriel. Si  $y_0$  n'est pas un point d'accumulation de G, il existe en vertu du lemme (Chapitre IV, § 3, p. 66), une fonctionnelle linéaire F(y) définie dans (c) et telle que l'on a  $F(y_0) = 1$  et F(y) = 0 pour tout  $y \subset G$ . Vu la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace (c) (cf. Chapitre IV, § 4, p. 74), il existe donc

une suite de nombres  $\{\alpha_i\}$  telle que la série  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$  est absolument convergente et que:

(13) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i + \alpha \lim_{i \to \infty} \eta_i = 0 \quad \text{pour} \quad \{\eta_i\} \subset G,$$

(14) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 + \alpha \lim_{i \to \infty} \eta_i^0 = 1.$$

La méthode A étant permanente, on a d'après (13)

(15) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x) + \alpha \lim_{k \to \infty} \xi_k = 0 \quad \text{pour tout } x = \{\xi_k\} \subset (c)$$

et le théorème 10 qui précède entraı̂ne l'existence d'un M satisfaisant à la condition  $1^{\circ}$  de son énoncé. On a par consequent

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot |a_{ik}| \cdot |\xi_k| \leqslant M \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot ||x||,$$

ďoù

(16) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik}.$$

En posant pour un k naturel fixé  $\xi_k = 1$  et  $\xi_n = 0$  pour  $n \neq k$ , on conclut de (15) que

(17) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, ...$$

En posant ensuite  $\xi_k = 1$  pour k = 1, 2, ..., on tire de (15), (16) et (17) que  $\alpha = 0$ , d'où, en vertu de (14), que  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 1$ , ce qui est, en raison de (17), en contradiction avec l'hypothèse.

Lemme 2. Si la méthode A est permanente et les conditions (10) entraînent la condition (11), il existe pour toute suite convergente  $\{\eta_i^0\}$  et pour tout nombre  $\varepsilon > 0$  une suite convergente x satisfaisant à la condition (12).

La démonstration est immédiate en vertu du lemme 1, qui précède. Lemme 3.  $x_0 = \{\xi_k^0\}$  étant une suite bornée, sommable par une méthode permanente A, il existe pour tout  $\varepsilon > 0$  une suite convergente x telle que

(18) 
$$|A_i(x) - A_i(x_0)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots$$

Démonstration. Posons

(19) 
$$\eta_i^0 = A_i(x_0)$$
 pour  $i = 1, 2, ...$ 

et désignons par  $\{\alpha_i\}$  une suite quelconque assujettie aux conditions (10), p. 93.

<sup>(1)</sup> Ce théorème est dû à O. Toeplitz (Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace Mat-Fiz. XXII, Varsovie (1911), p. 113-119).

On a, selon (19)

(20) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x_0)$$

et, A étant une méthode permanente, il existe d'après le théorème 10, p. 94, un nombre M satisfaisant à 1°, d'où

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot |a_{ik}| \cdot |\xi_k^0| \leqslant M \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot \text{borne sup } |\xi_k^0|$$

et selon (20)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k^0 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik},$$

donc, selon (10),  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = 0$ . Ceci établi, la thèse du lemme à démontrer résulte immédiatement du lemme 1.

Lemme 4. Soit  $x_0$  une suite sommable par une méthode A permanente et reversible. Si, quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite convergente x satisfaisant à la condition (18), la suite  $x_0$  est sommable vers le même nombre par toute méthode B permanente et pas plus faible de A.

Démonstration. La reversibilité de A entraı̂ne (voir Chapitre III, § 6, théorème 10, p. 58, et remarque p. 60) l'existence d'une suite  $\{\alpha_i\}$  et d'un tableau  $\{\beta_{ik}\}$  ayant les propriétés suivantes:

(21) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_{ik}| < \infty \quad pour \quad k = 1, 2, ...,$$

(22) si l'on pose pour une suite convergente  $y = \{\eta_i\}$ :

$$\xi_{k} = f_{k}(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{ik} \eta_{i} + \alpha_{k} \lim_{i \to \infty} \eta_{i} \quad \text{où} \quad k = 1, 2, ...,$$

on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad pour \quad i = 1, 2, \dots$$

Les fonctionnelles  $f_k(y)$  ainsi définies dans l'espace (c) sont linéaires. Pour toute suite convergente y la suite correspondante  $x = \{\xi_k\}$  étant par hypothèse sommable par la méthode permanente B, chacune des séries  $\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \xi_k \text{ est convergente et la suite de leurs sommes } \{B_i(x)\} \text{ l'est également.}$ 

Posons pour tout  $y \subset (c)$ :

$$F_i(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} f_k(y)$$
 pour  $i = 1, 2, ...$  et  $F(y) = \lim_{i \to \infty} F_i(y)$ .

Ainsi définies, les fonctionnelles  $F_i(y)$  sont linéaires; en vertu du théorème 4 (Chapitre I, § 3), p. 40, il en est donc de même de la fonctionnelle F(y).

Ceci établi, soient, conformément à l'hypothèse,  $x_0$  la suite donnée et x une suite convergente satisfaisant à (18). En posant  $y_0 = \{A_i(x_0)\}$  et  $y = \{A_i(x)\}$ , on a  $y_0 \subset (c)$ ,  $y \subset (c)$  et  $||y - y_0|| \le \varepsilon$ , donc

$$(23) |B(x)-B(x_0)| = |F(y)-F(y_0)| \leq |F| \cdot \varepsilon$$

et, comme A(x) = B(x), il vient

$$|A(x_0)-B(x_0)| \leq |A(x_0)-A(x)|+|B(x)-B(x_0)|,$$

d'où, selon (18) et (23),

$$|A(x_0)-B(x_0)| \leq |F| \cdot \varepsilon + \varepsilon$$
,

ce qui entraîne l'égalité  $A(x_0) = B(x_0)$ , c.q.f.d.

Les lemmes 3 et 4 donnent le

Théorème 11. Si la méthode permanente B n'est pas plus faible que la méthode permanente et reversible A, toute suite bornée sommamble par A est aussi sommable par B vers le même nombre (1).

D'autre part les lemmes 2 et 4 donnent le

Théorème 12. Si A est une méthode parfaite et B une méthode permanente pas plus faible de A, toute suite sommable par A est aussi sommable par B vers le même nombre (2).

<sup>(1)</sup> Pour une classe spéciale de méthodes reversibles, à savoir des méthodes ainsi dites normales, ce théorème a été trouvé par M. S. Mazur (l. c., Mathematische Zeitschrift 28 (1928), p. 599-611, Satz VII).

<sup>(2)</sup> Pour les méthodes normales cf. S. Mazur, Über eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren, Studia Mathematica 2 (1930), p. 40-50.

#### CHAPITRE VI

## Opérations totalement continues et associées

#### § 1. Opérations totalement continues

Une opération linéaire U(x) s'appelle totalement continue, si elle transforme tout ensemble borné en ensemble compact.

EXEMPLE. Si, pour i=1,2,...,n,  $X_i$  désignent des fonctionnelles linéaires et  $x_i$  des éléments, l'opération  $U(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \cdot x_i$  est totalement continue.

Théorème 1. Le contredomaine de toute opération totalement continue est séparable.

Démonstration. L'ensemble  $G_n$  de tous les U(x) où  $|x| \le n$  étant compact, donc séparable (1), il en est de même de l'ensemble  $\sum_{n=1}^{\infty} G_n$ , qui est le contredomaine de l'opération U.

Théorème 2. Etant donnée une suite  $\{U_n(x)\}$  d'opérations linéaires totalement continues, toute opération linéaire U(x) telle que  $\lim_{n\to\infty}|U_n-U|=0$  est aussi totalement continue.

Démonstration. Soient  $\{x_i\}$  une suite bornée et  $\{\overline{x}_i\}$  une suite extraite de  $\{x_i\}$  par la méthode de la diagonale de façon que  $\lim_{i\to\infty} U_n(\overline{x}_i)$  existe pour tout n naturel. On a en conséquence pour  $n=1,2,\ldots$ :

$$|U(\overline{x}_p) - U(\overline{x}_q)| \leqslant |U(\overline{x}_p) - U_n(\overline{x}_p)| + |U_n(\overline{x}_p) - U_n(\overline{x}_q)| + |U_n(\overline{x}_q) - U(\overline{x}_q)|,$$
 donc

$$|U(\overline{x}_p)-U(\overline{x}_q)|\leqslant |U-U_n|\cdot(|\overline{x}_p|+|\overline{x}_q|)+|U_n(\overline{x}_p)-U_n(\overline{x}_q)|,$$
 d'où évidemment  $\overline{\lim_{\substack{q\to\infty\\p\to\infty}}}|U(\overline{x}_p)-U(\overline{x}_q)|=0$ . Ainsi la suite  $\{U(\overline{x}_i)\}$  est convergente, ce qui implique la continuité totale de l'opération  $U(x)$ .

## § 2. Exemples des opérations totalement continues dans quelques espaces particuliers

Si K(s, t) est une fonction continue pour  $0 \le s \le 1$  et  $0 \le t \le 1$ , la fonction (de la variable s)

(1) 
$$u(s) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt$$

est continue, quelle que soit la fonction intégrable x(t). Regardée comme opération définie dans un des espaces

(2) 
$$(M), (C), (L)$$
 et  $(L^{(r)})$  où  $r > 1$ ,

et dont le contredomaine est situé dans un quelconque de ces espaces, l'opération (1) est totalement continue.

La démonstration s'appuie sur le théorème suivant de Arzelà:

Pour qu'une suite bornée de fonctions continues  $\{u_n(s)\}$  renferme une suite partielle uniformément convergente, il suffit qu'il existe pour tout nombre  $\varepsilon > 0$  un nombre  $\eta > 0$  tel que l'inégalité  $|s_1 - s_2| < \eta$  entraı̂ne l'inégalité  $|u_n(s_1) - u_n(s_2)| \le \varepsilon$  pour tout n = 1, 2, ...

Admettons en effet que  $||x_n(t)|| \le 1$  et que l'on ait pour  $0 \le s \le 1$  et  $n = 1, 2, \ldots u_n(s) = \int\limits_0^1 K(s, t) x_n(t) dt$ . La continuité de K(s, t) implique l'existence pour tout  $\varepsilon > 0$  d'un  $\eta > 0$  tel que l'inégalité  $|s_1 - s_2| < \eta$  entraı̂ne  $|K(s_1, t) - K(s_2, t)| \le \varepsilon$  pour  $0 \le t \le 1$ . Par conséquent

$$|u_n(s_1)-u_n(s_2)| \leq \Big|\int_0^1 [K(s_1,t)-K(s_2,t)] x_n(t) dt\Big| \leq \varepsilon \int_0^1 |x_n(t)| dt,$$

ce qui donne, en raison de l'inégalité  $\int_0^1 |x_n(t)| dt \le ||x_n||$ , facilement vérifiable dans les espaces (2),  $|u_n(s_1) - u_n(s_2)| \le \varepsilon$ , de sorte qu'en vertu du théorème de Arzelà on peut extraire de  $\{u_n(s)\}$  une suite uniformément convergente. Or, toute suite de fonctions uniformément convergente étant dans les espaces (2) convergente en même temps suivant la norme (qui y a été adoptée), il est démontré que l'opération (1) y est totalement continue. On a, en particulier, les théorèmes suivants:

Espace (C). Pour que l'opération (1) soit totalement continue dans (C), il suffit d'admettre que l'on a pour tout  $s_0$ :

(3) 
$$\lim_{s\to s_0} \int_0^1 |K(s_0,t)-K(s,t)| dt = 0.$$

En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$  on déduit facilement de (3) l'existence d'un  $\eta > 0$  tel que  $|s_1 - s_2| \le \eta$  entraı̂ne  $\int_0^1 |K(s_1, t) - K(s_2, t)| dt \le \varepsilon$ , ce qui im-

<sup>(1)</sup> Cf. p. ex. F. Hausdorff, l. c., p. 126.

plique, comme auparavant, la continuité totale de l'opération (1) dans (C). La condition (3) sera remplie p. ex., lorsque K(s, t) est une fonction

La condition (3) sera remptie p. ex., forsque K(s, t) est une fonction bornée et telle que l'on a  $\lim_{s\to s_0} K(s, t) = K(s_0, t)$  pour tout  $s_0$  et pour presque tout t.

Notons enfin que l'opération

$$y(s) = \int_{0}^{s} K(s, t) x(t) dt$$

est aussi totalement continue dans (C), si la condition (3) est remplie.

Espaces ( $L^{(p)}$ ). K(s,t) étant une fonction mesurable pour  $0 \le s \le 1$  et  $0 \le t \le 1$  et r désignant l'inférieur des nombres p et q/(q-1) où p>1 et q>1, si l'on a

(4) 
$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}} ds dt < \infty,$$

Popération (1) est totalement continue dans  $(L^{(p)})$  et son contredomaine est situé dans  $(L^{(q)})$ .

En effet,  $\{K_n(s,t)\}$  étant une suite de fonctions continues, soit

(5) 
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1 |K_n(s,t)-K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}}ds\,dt=0.$$

L'opération  $y = U_n(x) = \int_0^1 K_n(s, t) x(t) dt$  étant totalement continue pour  $x \subset (L^{(p)})$  et  $y \subset (L^{(q)})$ , on a

$$||U_{n}(x) - U(x)||^{q} \leq \int_{0}^{1} |\int_{0}^{1} (K_{n} - K)x(t) dt|^{q} ds$$

$$\leq \left\{ \int_{0}^{1} ds \left[ \int_{0}^{1} |K_{n} - K|^{\frac{r}{r-1}} dt \right]^{\frac{q(r-1)}{r}} \right\} \cdot \left( \int_{0}^{1} |x(t)|^{r} dt \right)^{\frac{q}{r}}.$$

Or, comme  $r \leq p$ , on a

$$\left(\int_{0}^{1}|x(t)|^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{0}^{1}|x(t)|^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

et comme 
$$r \leqslant \frac{q}{q-1}$$
, c.-à-d.  $\frac{q(r-1)}{r} \leqslant 1$ , on a

$$||U_n(x)-U(x)|| \leq \left\{\int_0^1 \int_0^1 |K_n-K|^{\frac{r}{r-1}} dt \, ds\right\}^{\frac{r-1}{r}} ||x||,$$

donc

$$||U_n - U|| \le \left[\int_0^1 \int_0^1 |K_n - K|^{\frac{r}{r-1}} dt ds\right]^{\frac{r-1}{r}},$$

d'où, selon (5),  $\lim_{n\to\infty} \|U_n - U\| = 0$ , ce qui implique en vertu du théorème 2, p. 98, la continuité totale de U, c.-à-d. de l'opération (1), où  $u(s) = U(x) \subset (L^{(q)})$ .

Remarque. En particulier, pour p = q = 2 la condition

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} K^2(s,t) ds dt < +\infty$$

entraı̂ne donc la continuité totale de l'opération (1) pour  $x \subset (L^{(2)})$  et  $u(s) \subset (L^{(2)})$ .

#### § 3. Opérations conjuguées (associées)

Soient, comme d'habitude, E et  $E_1$  deux espaces du type (B) et y = U(x) une opération linéaire définie dans E et dont le contredomaine est contenu dans  $E_1$ .

Convenons de désigner par X et Y des fonctionnelles linéaires définies respectivement dans E et  $E_1$ .

Considérons l'expression Y[U(x)] où Y est une fonctionnelle quelconque définie dans  $E_1$ . Cette expression peut être regardée évidemment comme une fonctionnelle définie dans E. Posons notamment

(6) 
$$X(x) = Y[U(x)].$$

Ainsi définie, la fonctionnelle X est additive et continue, car on a  $|X(x)| \le |Y[U(x)]| \le |Y| \cdot |U| \cdot |x|$ , d'où

$$|X| \leqslant |Y| \cdot |U|.$$

Or, la relation (6) entre X et Y constitue une nouvelle opération

$$X = \bar{U}(Y),$$

dont le domaine est l'espace  $\bar{E}_1$  des fonctionnelles linéaires définies dans E et dont le contredomaine est situé dans l'espace  $\bar{E}$  de celles définies dans E.

L'opération  $\overline{U}(Y)$  s'appelle associée à U(x) (ou conjuguée avec U(x)). En vertu de (7), elle est additive et continue.

Théorème 3.  $\bar{U}(Y)$  étant une opération associée à l'opération linéaire U(x), on a  $|\bar{U}|=|U|$ .

Démonstration. On a d'une part pour tout  $x \subset E$ :  $|Y[U(x)]| \le |Y| \times |U| \cdot |x|$ , d'où  $|\overline{U}(Y)| = |Y(U)| \le |Y| \cdot |U|$  et par conséquent

$$|\bar{U}| \leqslant |U|.$$

D'autre part, étant donné un  $x_0 \subset E$  arbitraire, il existe en vertu du théorème 3 (Chapitre IV, § 2), p. 64, une fonctionnelle linéaire  $Y_0$  définie dans  $E_1$  et telle que l'on a  $|Y_0| = 1$  et  $|Y_0[U(x_0)]| = |U(x_0)|$ , donc  $|U(x_0)| = |Y_0[U(x_0)]| \le |\bar{U}| \cdot |Y_0| \cdot |x_0| = |\bar{U}| \cdot |x_0|$ , d'où  $|U(x_0)| \le |\bar{U}| \cdot |x_0|$  et par conséquent

$$(9) |U| \leqslant |\bar{U}|.$$

Les inégalités (8) et (9) donnent l'égalité, q.f.d.

Théorème 4. Si l'opération linéaire U(x) est totalement continue, il en est de même de l'opération associée  $\bar{U}(Y)$ : en d'autres termes, si  $|Y_n| < M$ , il existe une suite  $\{Y_n\}$  et une fonctionnelle X telles que

(10) 
$$\lim_{i\to\infty}|\bar{U}(Y_{n_i})-X|=0.$$

Démonstration. Le contredomaine  $G \subset E_1$  de l'opération U(x) contenant en vertu du théorème 1, p. 98, un ensemble dénombrable dense, on peut selon le théorème 3 (Chapitre V, § 1), p. 85, extraire de la suite des fonctionnelles  $\{Y_n\}$  où  $|Y_n| < M$  une suite partielle  $\{Y_{n_i}\}$  convergente pour tout  $y \subset G$ . Posons donc  $\lim_{i \to \infty} Y_{n_i}[U(x)] = \lim_{i \to \infty} X_{n_i}(x) = X(x)$  et soit  $x_i$  un élément de E tel que l'on ait

(11) 
$$|x_i| = 1 \quad \text{et} \quad |X(x_i) - X_{n_i}(x_i)| \ge \frac{1}{2} |X - X_{n_i}|.$$

Or, si le théorème n'était pas vrai, c.-à-d. s'il existait un nombre  $\eta > 0$  tel que  $|X - X_{n_i}| > \eta$  pour tout i = 1, 2, ..., on aurait d'après (11), en posant pour abréger  $Y_i' = Y_{n_i}$ :

$$(12) |Y_i'[U(x_i)] - \lim_{i \to \infty} Y_j'[U(x_i)]| \ge \eta/2$$

et (comme  $|x_i| = 1$ ) il existerait une suite d'indices  $\{k_i\}$  telle que  $\lim_{i \to \infty} U(x_{k_i})$ =  $y_0$ . On trouverait donc, quel que soit  $\varepsilon > 0$ , un N naturel tel que l'on ait pour tout i > N les inégalités  $|y_0 - U(x_k)| < \varepsilon$  et

$$|Y_{k_i}'(y_0) - \lim_{j \to \infty} |Y_{k_j}'(y_0)| < \varepsilon,$$

d'où

$$\begin{split} |Y_{k_i}'[U(x_{k_i})] - \lim_{j \to \infty} Y_{k_j}'[U(x_{k_i})]| &\leq |Y_{k_i}'[U(x_{k_i}) - y_0| + \\ &+ |Y_{k_i}'(y_0) - \lim_{j \to \infty} Y_{k_j}'(y_0)| + |\lim_{j \to \infty} Y_{k_j}'[U(x_{k_i}) - y_0]| &\leq M \cdot \varepsilon + \varepsilon + M \cdot \varepsilon, \end{split}$$

ce qui est impossible en vertu de (12), le nombre  $\varepsilon$  étant aussi petit que l'on veut.

## § 4. Applications. Exemples des opérations conjuguées dans quelques espaces particuliers

Espace (C). Si K(s, t) est une fonction continue pour  $0 \le s \le 1$  et  $0 \le t \le 1$ , l'expression

$$U(x) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt$$

est une opération continue.

Soit Y(y), où  $y \subset (C)$ , une fonctionnelle linéaire quelconque. Comme définie dans (C), elle est donc (cf. Chapitre IV, § 4, p. 67) de la forme  $Y(y) = \int_0^1 y(t) dY(t)$ , où Y(t) est une fonction à variation bornée. La fonctionnelle X(x) = Y[U(x)] est également linéaire dans (C), donc encore de la forme

(13) 
$$X(x) = \int_0^1 x(t) dX(t),$$

où X(t) est aussi une fonction à variation bornée (et nous pouvons admettre que X(0) = 0). En posant par conséquent

(14) 
$$y(s) = U(x) = \int_{0}^{1} K(s, t) x(t) dt,$$

on a pour toute function  $x(t) \subset (C)$ :.

(15) 
$$\int_{0}^{1} x(s) dX(s) = \int_{0}^{1} y(s) dY(s).$$

Considérons la fonction

$$x_{v,n}(s) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \le s \le v, \\ 0 & \text{pour} \quad v + 1/n \le s \le 1, \end{cases}$$

et qui soit linéaire pour  $v \le s \le v + 1/n$ . Par substitution de  $x_{v,n}(s)$  au lieu

de x(s) dans (14) et (15) on obtient

$$\int_{0}^{1} x_{\nu,n}(s) dX(s) = \int_{0}^{1} \left[ \int_{0}^{1} K(s,t) x_{\nu,n}(t) dt \right] dY(s) = \int_{0}^{1} x_{\nu,n}(t) \left[ \int_{0}^{1} K(s,t) dY(s) \right] dt(1),$$

d'où, par le passage à la limite avec  $n\to\infty$ , on a pour s=0,1 et pour tout points s où la fonction X(s) est continue, donc dans tout point de [0,1], sauf tout au plus une infinité dénombrable de points,

(16) 
$$X(s) = \int_0^s \left[ \int_0^1 K(s,t) dY(s) \right] dt;$$

or, la valeur de l'intégrale de Stieltjes (13) restant la même, lorsqu'on modifie la valeur de la fonction X(t) dans une infinité dénombrable de points (excepté 0 et 1), on peut admettre que la fonction X(s) est définie par la formule (16) dans [0, 1] tout entier, donc qu'elle est continue pour  $0 \le s \le 1$ .

L'expression (16) peut être considérée par conséquent comme représentation de l'opération associée  $\bar{U}(Y)=X$ . Il faut l'entendre dans ce sens que, Y(s) étant une fonction à variation bornée qui représente la fonctionnelle linéaire  $\int\limits_0^1 y(s)\,dY(s)$ , la fonction correspondante X(s) à variation bornée représente la fonctionnelle linéaire  $\int\limits_0^1 x(t)\,dX(t)$ .

Pour l'opération linéaire

$$U(x) = x(s) - \int_0^1 K(s, t) x(t) dt$$

(1) En vertu du théorème suivant sur la "commutativité de l'intégration" pour les intégrales multiples de Stieltjes d'une fonction continue:

Etant données une fonction F(s,t) continue dans le carré K = [0,1;0,1] et deux fonctions g(t) et h(t) à variation bornée dans [0,1], on a

$$\iint_{K} F(s,t) dg(s) dh(t) = \iint_{0}^{1} \left[ \int_{0}^{1} F(s,t) dg(s) \right] dh(t) = \iint_{0}^{1} \left[ \int_{0}^{1} F(s,t) dh(t) \right] dh(s).$$

La première de ces trois intégrales (l'intégrale double) est à entendre comme la limite des sommes de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} F(s'_{i}, t'_{j}) [g(s_{i+1}) - g(s_{i})] [h(t_{j+1}) - h(t_{j})]$$

(où  $0 = s_0 < s_1 < ... < s_i < ... < s_{m+1} = 1$  et  $0 = t_0 < t_1 < ... < t_j < ... < t_{m+1} = 1$ , les points  $s_i' \subset [s_i, s_{i+1}]$  et  $t_j' \subset [t_j, t_{j+1}]$  étant arbitraires), lorsque la longueur des plus grands des segments  $[s_i, s_{i+1}]$  et  $[t_i, t_{i+1}]$  tend vers 0.

La démonstration du théorème en question coıncide avec celle de théorème analogue pour les intégrales de Riemann.

(avec la même fonction K(s, t)) on a

$$\bar{U}(Y) = Y(t) - \int_0^t dt \int_0^1 K(s, t) dY(s) = X(t).$$

Espaces  $(L^{(p)})$ . Si K(s,t) est une fonction mesurable pour  $0 \le s \le 1$  et  $0 \le t \le 1$  et si l'on a

(17) 
$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} |K(s, t) x(t) Y(s)| ds dt < \infty$$

pour tout couple  $x(t) \subset (L^{(p)})$  et  $Y(s) \subset (L^{(q-1)})$  où p > 1 et q > 1, l'opération

$$U(x) = y(s) = \int_{0}^{1} K(s, t) x(t) dt$$

est linéaire pour  $x \subset (L^{(p)})$  et  $y \subset (L^{(q)})$ .

La fonctionnelle linéaire Y dans l'espace (L'(q)) est de la forme

$$Y(y) = \int_0^1 Y(s) y(s) ds,$$

où Y(s) est une fonction appartenant à  $(L^{(\frac{q}{q-1})})$  et on a

$$Y(y) = \int_0^1 Y(s) ds \int_0^1 K(s, t) x(t) dt = \int_0^1 x(t) dt \int_0^1 K(s, t) Y(s) ds.$$

En posant

(18) 
$$X(t) = \int_{0}^{1} K(s, t) Y(s) ds,$$

on a

$$\int_0^1 Y(s) y(s) ds = \int_0^1 X(t) x(t) dt.$$

L'expression (18) peut être considérée comme représentation de l'opération associée  $\bar{U}(Y) = X$ .

Dans le cas particulier où p = q > 1, l'opération associée à l'opération linéaire

$$U(x) = x(s) - \int_0^1 K(s, t) x(t) dt$$

est de la forme

$$X = \bar{U}(Y) = Y(t) - \int_0^1 K(s, t) Y(s) ds.$$

icm

Espace (L). Les considérations qui précèdent s'appliquent également à l'espace (L). Si l'on a la formule (17) pour  $x \subset (L)$  et  $Y \subset (M)$ , l'expression

$$y = U(x) = \int_0^1 K(s, t) x(t) dt$$

est une opération linéaire pour  $x \subset (L)$  et  $y \subset (L)$ . L'opération associée est de la forme

$$X = \bar{U}(Y) = \int_0^1 K(s, t) Y(s) ds$$

où  $Y(s) \subset (M)$  représente la fonctionnelle linéaire  $\int_0^1 Y(s) y(s) ds$  pour  $y(s) \subset (L)$ , tandis que  $X(t) \subset (M)$  représente la fonctionnelle linéaire  $\int_0^1 X(t) x(t) dt$  pour  $x(t) \subset (L)$ .

Pour un couple correspondant X, Y et x, y on a

$$\int_0^1 X(t)x(t)dt = \int_0^1 Y(s)y(s)ds.$$

### CHAPITRE VII

## Suites biorthogonales

### § 1. Définition et propriétés générales

Une suite d'éléments  $\{x_i\}$  et de fonctionnelles linéaires  $\{f_i\}$  s'appelle biorthogonale, lorsque

(1) 
$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j, \\ 0 & \text{pour } i \neq j. \end{cases}$$

Etant donné un  $x \subset E$  arbitraire, la série

(2) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i(x)$$

porte le nom du développement de x suivant la suite biorthogonale  $\{x_i\}$ ,  $\{f_i\}$ . Dans le cas où la suite  $\{f_i\}$  constitue un ensemble total de fonctionnelles (cf. Chapitre III, § 3, p. 54) et la série (2) est pour un x convergente, x est la somme de cette série; en effet, on a alors pour tout j = 1, 2, ...,

$$f_j[x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i(x)] = f_j(x) - f_j(x) = 0.$$

Théorème 1. Si la série (2) est convergente pour tout  $x \subset E$ , la série  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cdot F(x_i)$ 

est aussi convergente pour tout  $x \subseteq E$ , quelle que soit la fonctionnelle linéaire F.

Démonstration. En posant

$$S_n = \sum_{i=1}^n f_i \cdot F(x_i),$$

on a  $S_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \cdot F(x_i) = F\left[\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i(x)\right]$ , de sorte que la convergence de la suite  $\{S_n(x)\}$  pour tout x est évidente.

Chapitre VII. Suites biorthogonales

109

THÉORÈME 2. Si les normes des sommes partielles (3) de la série

(4) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot F(x_i)$$

sont bornées dans leur ensemble, quelle que soit la fonctionnelle linéaire F, la série (2) est convergente pour tout  $x \subset E$  qui est la limite d'une suite quelconque de combinaisons linéaires formées de termes de la suite  $\{x_i\}$ .

Démonstration. En posant

(5) 
$$s_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i(x),$$

on a  $F[s_n(x)] = \sum_{i=1}^n F(x_i) \cdot f_i(x) = S_n(x)$  (voir (3)) et, comme par hypothèse  $|S_n| \leq M$  où M est un nombre indépendant de n, on a pour tout  $x \subset E$  en vertu du théorème 6 (Chapitre V, § 1), p. 86:  $\overline{\lim_{n \to \infty}} |s_n(x)| < \infty$ . Il existe donc en vertu du théorème 5 (Chapitre V, § 1), p. 85, un nombre N, indépendant de n et de x, tel que  $|s_n(x)| \leq N \cdot |x|$ .

Or, comme pour tout i=1,2,... on a  $\lim_{n\to\infty} s_n(x_i)=x_i$ , on établit par un raisonnement banal l'existence de  $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$  pour tout élément  $x\subset E$  qui satisfait à la condition de l'énoncé.

Théorème 3. Si les normes des sommes partielles (5) de la série (2) sont bornées dans leur ensemble, quel que soit  $x \subset E$ , la série (4) est convergente pour toute fonctionnelle F qui est la limite d'une suite quelconque de combinaisons linéaires formées de termes de la suite  $\{f_i\}$ .

La démonstration est analogue à celle du théorème 2, qui précède. Théorème 4. Dans les mêmes hypothèses, si en outre  $\{x_i\}$  est une suite fondamentale, la série (2) est convergente pour tout  $x \subset E$ .

Démonstration. On a, selon (5),  $\overline{\lim}_{n\to\infty} |s_n(x)| < \infty$  pour tout  $x \subset E$  et, de plus,  $\lim_{n\to\infty} s_n(x_i) = x_i$  pour tout i=1,2,... La convergence de la série (2) pour tout  $x \subset E$  en résulte en vertu des théorèmes 5 et 3 (Chapitre V, § 1), p. 85.

### § 2. Suites biorthogonales dans quelques espaces particuliers

Envisageons à présent comment se comportent les suites biorthogonales dans les espaces qui nous intéressent plus particulièrement.

Posons

(6) 
$$\int_{0}^{1} x_{i}(t) y_{j}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j, \\ 0 & \text{pour } i \neq j. \end{cases}$$

Admettons de plus que  $\{x_i(t)\}$  soit une suite de fonctions dans  $(L^{(p)})$  où p > 1 et  $\{y_i(t)\}$  en soit une dans  $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ ; enfin que ces suites y soient complètes (ou fermées).

Théorème 5. Dans ces hypothèses, si la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 y_i(t) x(t) dt$$

est convergente en moyenne avec la p-ième puissance, quelle que soit la fonction  $x(t) \subset (L^{(p)})$ , la série

(7) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_{0}^{1} x_i(t) y(t) dt$$

est convergente en moyenne avec la  $\frac{p}{p-1}$ -ième puissance pour toute fonction  $y(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$ .

Démonstration. Soit

$$f_i(x) = \int_0^1 y_i(t) x(t) dt \quad \text{pour} \quad x(t) \subset (L^{(p)}).$$

La série  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_i(x)$  est donc par hypothèse pour tout  $x \in (L^{(p)})$  convergente en moyenne (c.-à-d. selon la norme) avec la p-ième puissance. En vertu du théorème 3, p. 108, la série  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \cdot F(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t) y(t) dt$  où  $y(t) \in (L^{(\frac{p}{p-1})})$  est par conséquent avec la  $\frac{p}{p-1}$ -ième puissance convergente selon la norme (c.-à-d. en moyenne) pour toute fonctionnelle linéaire F définie dans l'espace  $(L^{(p)})$ ; il en est donc de même de la série (7) pour toute fonction  $y(t) \in (L^{(\frac{p}{p-1})})$ , c.q.f.d. En particulier, lorsque  $x_i(t) = y_i(t) \in (L^{(r)})$  où r est le plus grand des

En particulier, lorsque  $x_i(t) = y_i(t) \subset (L^{(r)})$  où r est le plus grand des nombres p et  $\frac{p}{p-1}$ , le théorème qui vient d'être établi entraı̂ne le corollaire suivant.

Si la série

(8) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 x_i(t) x(t) dt$$

est pour  $x \subset (L^{(p)})$  convergente en moyenne avec la p-ième puissance, elle l'est également pour tout  $x \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$  avec la  $\frac{p}{p-1}$ -ième puissance.

On peut y admettre p. ex. que  $x_i$ , où i = 1, 2, ..., sont des fonctions bornées.

Considérons maintenant le cas où, dans l'hypothèse (6),  $\{x_i(t)\}$  est une suite de fonctions intégrables et  $\{y_i(t)\}$  une suite de fonctions bornées pour  $0 \le t \le 1$ . Admettons enfin que la suite  $\{x_i(t)\}$  soit complète dans (L).

THÉORÈME 6. Dans ces hypothèses, si la série  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 y_i(t) x(t) dt$  est convergente en moyenne pour tout  $x(t) \subset (L)$ , la série  $\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t) y(t) dt$ 

est bornée presque partout pour tout  $y(t) \subset (M)$  et réciproquement. Le démonstration est analogue à celle du théorème 5, qui précède:

on considère  $x_i$  comme des éléments du domaine (L) et  $y_i$  comme des représentants des fonctionnelles linéaires; on a recours enfin aux théorèmes 3 et 4, p. 108.

En particulier, lorsque  $x_i(t) = y_i(t)$ , on a les corollaires:

1° Si la série (8), où  $x_i(t) = y_i(t) \subset (M)$ , est convergente en moyenne pour tout  $x(t) \subset (L)$ , elle est bornée pour tout  $x(t) \subset (M)$  et réciproquement.

2° Si la série (8), où  $x_i(t) = y_i(t) \subset (C)$  et  $\{x_i\}$  est une suite complète dans (C), est uniformément convergente pour tout  $x(t) \subset (C)$ , elle est convergente en moyenne pour tout  $x(t) \subset (L)$  et réciproquement.

La démonstration s'obtient: dans un sens, en considérant  $x_i$  comme des éléments du domaine (C) et  $y_i = x_i$  comme des représentants des fonctionnelles, et, dans le sens inverse, en regardant  $x_i(t)$  comme des éléments du domaine (L) et  $y_i = x_i$  comme des représentants des fonctionnelles linéaires définies dans (L).

### § 3. Bases dans les espaces du type (B)

Une suite  $\{x_i\}$  d'éléments de E s'appelle  $base(^1)$ , lorsqu'il existe pour tout  $x \subseteq E$  exactement une suite de nombres  $\{\eta_i\}$  telle que l'on ait

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i.$$

Etant donnée une base  $\{x_i\}$ , soit  $E_1$  l'ensemble des suites  $y = \{\eta_i\}$  pour lesquelles la série  $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$  est convergente. En posant

$$|y| = \text{borne sup } \Big| \sum_{i=1}^{n} \eta_i x_i \Big|,$$

on montre facilement que  $E_1$  ainsi normé constitue un espace du type (B).

Posons ensuite

$$x = U(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$$
 pour toute suite  $y = {\eta_i} \subset E_1$ .

Ainsi définie, l'opération U(y) est linéaire, car  $|U(y)| \le |y|$ , est comme elle transforme  $E_1$  en E d'une façon biunivoque, l'opération inverse  $y = U^{-1}(x)$  est également linéaire.

Enfin la fonctionnelle

$$f_i(x) = \eta_i$$
 où  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$ 

est aussi linéaire, car  $|\eta_i x_i| \le 2 \cdot |y|$  et

$$|f_i(x)| = |\eta_i| \le \frac{2}{|x_i|} |y| \le \frac{2}{|x_i|} |U^{-1}| \cdot |x|.$$

Or, on a par conséquent

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$$
 pour tout  $x \subset E$ 

et, ce développement étant unique, on obtient l'égalité (1) (voir p. 107), de sorte que la suite  $\{x_i\}$ ,  $\{f_i\}$  est biorthogonale.

Remarquons que pour toute fonctionnelle linéaire F définie dans E la série  $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cdot F(x_i)$  converge vers F(x), car on a pour tout  $x \subset E$ :

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \cdot F(x_i) = \lim_{n \to \infty} F\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i(x)\right] = F(x).$$

On ne sait pas si tout espace du type (B) séparable admet une base. La question n'est résolue que pour certains espaces particuliers. Ainsi p. ex. dans  $(L^{(p)})$  où  $p \ge 1$  la base est donnée par le système orthogonal de Haar. Dans (C) la base a été construite par M. J. Schauder (1). Dans  $(l^{(p)})$  où  $p \ge 1$  la base est fournie par la suite  $\{x_i\}$  où

$$x_i = \{\xi_n^{(i)}\} \quad \text{et} \quad \xi_n^{(i)} = \begin{cases} 1 \text{ pour } i = n, \\ 0 \text{ pour } i \neq n; \end{cases}$$

on a alors  $f_i(x) = \xi_i$  pour  $x = \{\xi_i\}$ . Enfin dans (c) la base est formée de la même suite augmentée de l'élément  $x_0 = \{\xi_n^{(0)}\}$  où  $\xi_n^{(0)} = 1$  pour  $n = 1, 2, \ldots$  On a alors  $f_0(x) = \lim_{i \to \infty} \xi_i$  pour  $x = \{\xi_i\} \subset (c)$ .

<sup>(1)</sup> Cette notion a été introduite dans le cas général par M. J. Schauder (Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Zeitsch. 26 (1927), p. 47-65) [cf. aussi Ozuvres, Warszawa 1978, p. 63-82].

<sup>(1)</sup> L. c., Mathematische Zeitschrift 26 (1927), p. 48-49 [Oeuvres, p. 64-65].

### § 4. Quelques applications à la théorie des développements orthogonaux

THÉORÈME 7. Les suites  $\{x_i\}$ ,  $\{f_i\}$  et  $\{y_i\}$ ,  $\{\phi_i\}$  étant biorthogonales et les équations  $f_i(x) = \phi_i(y)$  où  $i = 1, 2, \ldots$  admettant pour tout x exactement une seule solution y = U(x), la convergence de la série  $\sum_{i=1}^{\infty} h_i x_i$  entraîne celle de la série  $\sum_{i=1}^{\infty} h_i y_i$  pour toute suite de nombres  $\{h_i\}$ .

Démonstration. On aperçoit facilement que les égalités  $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$  et  $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$  où  $y_n = U(x_n)$  entraînent l'égalité  $y_0 = U(x_0)$ . En vertu du théorème 7 (Chapitre III, § 3), p. 54, l'opération y = U(x) est par conséquent linéaire. En posant donc |U| = M, on a  $|U(x)| \le M \cdot |x|$  et comme par définition  $U(x_i) = y_i$  pour i = 1, 2, ..., il vient

$$U\left(\sum_{i=1}^{n}h_{i}x_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}h_{i}y_{i}$$

pour  $h_i$  réels quelconques, ce qui implique immédiatement la thèse du théorème.

COROLLAIRE.  $\{x_i(t)\}$  et  $\{y_i(t)\}$  étant des suites orthogonales normées de fonctions continues, si pour toute fonction continue x(t) il existe une fonction continue unique y(t) telle que l'on ait

$$\int_{0}^{1} x_{i}(t) x(t) dt = \int_{0}^{1} y_{i}(t) y(t) dt,$$

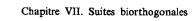
la convergence uniforme de la série  $\sum_{i=1}^{\infty} h_i x_i(t)$  entraı̂ne celle de la série  $\sum_{i=1}^{\infty} h_i y_i(t)$ .

Des corollaires analogues s'obtiennent pour d'autres espaces fonctionnels (1).

Théorème 8. Soient:  $\{x_i\}$ ,  $\{f_i\}$  une suite biorthogonale, où  $\{f_i\}$  est une suite totale, et  $\{h_i\}$  une suite de nombres telle que,  $\{\alpha_i\}$  étant une suite de coefficients d'un élément x (c.-à-d. que  $\alpha_i = f_i(x)$  pour i = 1, 2, ...),  $\{h_i\alpha_i\}$  en soit une d'un élément y.

Si dans ces conditions  $\{\beta_i\}$  est une suite de coefficients d'une fonctionnelle linéaire F (c.-à-d. que  $\beta_i = F(x_i)$  pour i = 1, 2, ...), la suite  $\{h_i \beta_i\}$  l'est d'une fonctionnelle linéaire  $\Phi$ .

Démonstration. Le système d'équations  $h_i f_i(x) = f_i(y)$  où i = 1, 2, ...



admet par hypothèse pour tout x exactement une solution. Désignons-la par y = U(x).

Les égalités  $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$  et  $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$  où  $y_n = U(x_n)$  entraînent évidemment l'égalité  $y_0 = U(x_0)$ . Par conséquent, en vertu du théorème 7 (Chapitre III, § 3), p. 54, l'opération U(x) est continue. En particulier, on vérifie aisément que l'on a

(9) 
$$U(x_i) = h_i x_i$$
 pour tout  $i = 1, 2, ...$ 

Or, étant donnée une fonctionnelle linéaire F telle que  $\beta_i = F(x_i)$  pour i = 1, 2, ..., on a selon (9)  $F[U(x_i)] = h_i F(x_i) = h_i \beta_i$ , c.-à-d. que les nombres  $h_i \beta_i$  sont des coefficients de l'opération  $\Phi = \overline{U}(F)$ , c.q.f.d.

Remarquons que si  $x = \lim_{i \to \infty} x_i$ , U(x) est en vertu de (9) la limite d'une combinaison linéaire de termes de la suite  $\{x_i\}$ .

Comme une application facile de cette remarque, nous obtenons le

Théorème 9. Soit  $\{x_i(t)\}$  une suite orthogonale et normée de fonctions continues, fermée dans l'espace (C).

Si la suite de facteurs  $\{h_i\}$  transforme toute suite  $\{\alpha_i\}$  de coefficients d'une fonction bornée en une suite  $\{h_i\alpha_i\}$  de ceux d'une fonction bornée, elle transforme en même temps toute suite  $\{\beta_i\}$  de coefficients d'une fonction continue arbitraire en une suite  $\{h_i\beta_i\}$  de coefficients d'une fonction continue.

Le théorème inverse est aussi vrai.

On a enfin le

Théorème 10. Soit  $\{x_i(t)\}$  une suite de fonctions bornées orthogonale, normale et complète dans  $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ , où p>1.

Si la suite de facteurs  $\{h_i\}$  transforme la suite de coefficients  $\{\alpha_i\}$  d'une fonction arbitraire  $x(t) \subset (L^{(p)})$  dans la suite  $\{h_i \alpha_i\}$  de ceux d'une fonction  $y(t) \subset (L^{(p)})$ , elle transforme aussi toute suite  $\{\beta_i\}$  de coefficients d'une fonction arbitraire  $\bar{x}(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$  dans la suite  $\{h_i \beta_i\}$  de ceux d'une fonction  $\bar{y}(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ . Si  $p = \infty$ , alors  $(L^{(p)}) = (M)(1)$ .

<sup>(1)</sup> Cf. S. Banach [15] [cette édition, vol. I, p. 160-162] et H. Steinhaus, Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la théorie des séries orthogonales, Studia Mathematica 1 (1929), p. 191-200.

<sup>(1)</sup> Cf. W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, Studia Mathematica 1 (1929), p. 1-39 et 241-255.

115

## CHAPITRE VIII

## Fonctionnelles linéaires dans les espaces du type (B)

#### § 1. Préliminaires

Etant donné un espace vectoriel fermé d'éléments  $G \subset E$  et l'espace  $\overline{E}$  de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E, il existe, comme nous avons vu (cf. Chapitre IV, § 3, p. 66, lemme), pour un élément quelconque  $x_0 \subset E-G$  une fonctionnelle linéaire  $f \subset \overline{E}$  telle que l'on a

$$f(x_0) = 1$$
 et  $f(x) = 0$  pour tout  $x \subset G$ .

Le problème s'impose si, réciproquement, la relation analogue ne subsiste entre les espaces  $\Gamma \subset \vec{E}$  de fonctionnelles linéaires et les éléments de E. Plus précisément, il s'agit de savoir si, étant donné un espace vectoriel fermé  $\Gamma \subset \vec{E}$  de fonctionnelles linéaires définies dans E, il existe pour une fonctionnelle quelconque  $f_0 \subset \vec{E} - \Gamma$  un élément  $x \subset E$  tel que l'on ait

(1) 
$$f_0(x) = 1$$
 et  $f(x) = 0$  pour tout  $f \subset \Gamma$ .

Or, la réponse est, dans le cas général, négative.

Considérons, en effet, comme E l'espace (c) des suites convergentes de nombres réels, donc comme  $\bar{E}$  l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans (c), et comme  $\Gamma$  celui de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans (c) de la forme:

(2) 
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \quad \text{où} \quad x = \{\xi_i\} \subset (c) \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty.$$

Ainsi défini,  $\Gamma$  est un espace vectoriel et fermé. En effet, posons

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0,$$

οù

(4) 
$$f_n \subset \Gamma \text{ et } f_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(n)} \xi_i \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \dots$$

Il s'agit de montrer que  $f \subset \Gamma$ . Or, (3) entraı̂ne  $\lim_{\substack{p\to\infty\\q\to\infty}} \|f_p - f_q\| = 0$ , d'où, comme par définition

$$f_p(x)-f_q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i^{(p)} - \alpha_i^{(q)}) \xi_i,$$

on conclut de (3) en vertu du théorème (Chapitre IV, § 4), p. 74, que

$$\lim_{\substack{p \to \infty \\ a \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i^{(p)} - \alpha_i^{(q)}| = 0$$

et, par conséquent, qu'il existe une suite  $\{\alpha_i\}$  telle que l'on a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i^{(n)}-\alpha_i|=0\quad \text{ et } \quad \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty.$$

On a donc pour tout  $x = \{\xi_i\} \subset (c)$  l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{(n)}\,\xi_i=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\xi_i,$$

d'où, selon (4),

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$$

et comme selon (3)

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|\leqslant \lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|\cdot|x|=0,$$

il vient  $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$  pour tout  $x \subset (c)$ . La fonctionnelle f est donc de la forme (2), d'où finalement  $f \subset \Gamma$ .

Ceci établi, soit

(5) 
$$f_0(x) = \lim_{l \to \infty} \xi_l \quad \text{pour} \quad x = \{\xi_l\} \subset (c).$$

La fonctionnelle  $f_0$  ainsi définie n'appartient évidemment pas à  $\Gamma$ . Cependant il n'existe aucun  $x_0 = \{\xi_i^{(0)}\} \subset (c)$  satisfaisant aux conditions (1), car (1) et (5) entraînant l'égalité  $\lim_{i \to \infty} \xi_i^{(0)} = 1$ , il est impossible d'avoir pour toute suite de nombres  $\{\alpha_i\}$  satisfaisant aux conditions (2) l'égalité  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i^{(0)} = 0$  exigée par (1).

### § 2. Ensembles régulièrement fermés de fonctionnelles linéaires

Un ensemble vectoriel  $\Gamma$  de fonctionnelles linéaires définies dans un espace E du type (B) s'appelle régulièrement fermé, lorsqu'il existe pour toute fonctionnelle linéaire définie dans E, mais n'appartenant pas à  $\Gamma$ , un élément  $x_0 \subset E$  qui remplisse les conditions (1).

Chapitre VIII. Fonctionnelles linéaires dans les espaces du type (B)

117

L'exemple qui précède montre que l'ensemble vectoriel fermé de fonctionnelles linéaires n'est pas toujours régulièrement fermé. Or, la réciproque est vraie: tout ensemble vectoriel de fonctionnelles linéaires  $\Gamma$  qui est régulièrement fermé est en même temps fermé dans le sens ordinaire (v. Introduction, p. 32) de ce terme.

En effet, soit

(6) 
$$f_n \subset \Gamma$$
 pour  $n = 1, 2, ...$ 

et

(7) 
$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f_0\| = 0.$$

Si dans ces conditions  $f_0$  n'appartenait pas à l'ensemble  $\Gamma$ , supposé vectoriel et régulièrement fermé, il existerait un  $x_0 \subset E$  satisfaisant à (1); d'après (6) on aurait donc en particulier  $f_n(x_0) = 0$  pour n = 1, 2, ..., d'où, selon (7),  $f_0(x_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = 0$ , contrairement à (1). On doit donc admettre que  $f_0 \subset \Gamma$ , c.-à-d. que l'ensemble  $\Gamma$  est fermé.

Il est facile de donner des exemples d'ensembles régulièrement fermés. Soit, en effet, E un espace du type (B) et  $G \subseteq E$  un ensemble vectoriel, d'ailleurs arbitraire. L'ensemble  $\Gamma$  des fonctionnelles linéaires f définies dans E et telles que

$$f(x) = 0$$
 pour tout  $x \subset G$ 

est, comme on l'aperçoit aisément, régulièrement fermé.

Remarque. Si l'ensemble  $\Gamma$  en question est non seulement vectoriel et régulièrement fermé, mais en outre total, il contient toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E.

En effet, la définition de l'ensemble total (voir Chapitre III, § 3, p. 54) implique que le seul élément de E pour lequel toutes les fonctionnelles  $f \subset \Gamma$  s'annulent est l'élément  $\Theta$ .

Nous allons nous occuper dans ce chapitre des propriétés que possèdent les ensembles régulièrement fermés de fonctionnelles linéaires (1).

#### § 3. Ensembles transfiniment fermés de fonctionnelles linéaires

Etant donnés un nombre ordinal quelconque  $\vartheta$  qui est un nombre-limite, c.-à-d. n'ayant pas de précédent immédiat, et une suite bornée de nombres réels  $\{C_{\xi}\}$  du type  $\vartheta$ , c.-à-d. où  $1 \leq \xi < \vartheta$ , on appelle limite transfinie supérieure de  $\{C_{\xi}\}$  et on désigne par  $\overline{\lim_{\xi \to \vartheta} C_{\xi}}$  la borne inférieure des nombres réels t satisfaisant à l'inégalité  $C_{\xi} \leq t$  à partir d'un indice

(ordinal) qui dépend de t. La limite transfinie inférieure de  $\{C_{\xi}\}$  est ensuite définie par la formule

$$\lim_{\xi\to\vartheta}C_{\xi}=-\overline{\lim}_{\xi\to\vartheta}(-C_{\xi}).$$

Lemme 1. Si l'on a pour une suite  $\{f_{\xi}\}$  du type  $\vartheta$  de fonctionnelles linéaires

$$|f_{\varepsilon}| \leq M$$
 pour  $1 \leq \xi < \vartheta$ ,

il existe une fonctionnelle linéaire f remplissant les conditions:

$$(8) |f| \leq M et \lim_{\xi \to \vartheta} f_{\xi}(x) \leq f(x) \leq \overline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f_{\xi}(x) pour tout x \subset E.$$

La démonstration résulte du théorème 1 (Chapitre II, § 2), p. 43, en y posant  $p(x) = \overline{\lim_{\xi \to 0}} f_{\xi}(x)$ . La fonctionnelle p(x) satisfait en outre à l'inégalité  $p(x) \le M \cdot |x|$ .

Ce lemme établi, nous appellerons une fonctionnelle linéaire f(x) remplissant les conditions (8) limite transfinie de la suite  $\{f_{\varepsilon}(x)\}\$ .

En particulier, lorsque  $\lim_{n\to\infty} |f_n-f|=0$ , la fonctionnelle f(x) est évidemment une limite transfinie de la suite  $\{f_n(x)\}$ , car on a  $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$   $= \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$  pour tout  $x \subset E$ .

Un espace vectoriel  $\Gamma$  de fonctionnelles linéaires est dit transfiniment fermé, lorsque toute suite transfinie  $\{f_{\xi}\}$  de fonctionnelles de  $\Gamma$  à normes bornées dans leur ensemble admet une limite transfinie  $f \subset \Gamma$ .

Tout espace  $\Gamma$  transfiniment fermé est en même temps fermé au sens ordinaire.

En effet, les formules (6) et (7) donnent alors  $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$  pour tout  $x \subset E$  et comme toute fonctionnelle f qui satisfait à la condition  $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \le f(x) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$  est dans ce cas identique avec la fonctionnelle  $f_0$ , cette dernière, comme la seule limite transfinie de la suite  $\{f_n\}$ , appartient à l'espace  $\Gamma$ , qui est par conséquent fermé.

Lemme 2. Etant donnés un espace vectoriel et transfiniment fermé  $\Gamma$  de fonctionnelles linéaires (définies dans E) et une fonctionnelle linéaire  $f_0$  n'appartenant pas à  $\Gamma$ , il existe pour chaque nombre M satisfaisant à la condition

$$(9) 0 < M < |f - f_0| pour tout f \subset \Gamma,$$

un élément  $x_0 \subset E$  tel que l'on a

$$f_0(x_0) = 1$$
,  $f(x_0) = 0$  pour tout  $f \subset \Gamma$  et  $|x_0| < 1/M$ .

Démonstration.  $\{M_i\}$  où  $M_1 = M$  étant une suite infiniment croissante quelconque de nombres, désignons par m le plus grand nombre cardinal

<sup>(1)</sup> Cf. S. Banach [23], p. 228-234 [ce volume, p. 381-395], où se trouvent les théorèmes des §§ 3-5 de ce chapitre.

119

satisfaisant à la condition suivante: étant donné un ensemble quelconque  $G \subset E$  de puissance < m, il existe une fonctionnelle linéaire  $f \subset \Gamma$  telle que

(10) 
$$|f| \leqslant M_2$$
 et  $|f(x) - f_0(x)| \leqslant M_1 \cdot |x|$  pour tout  $x \subset G$ .

Le nombre m ainsi défini-remarquons-le de suite-ne dépasse pas la puissance de E, car, s'il existait un  $f \subset \Gamma$  tel que  $|f(x)-f_0(x)| \leq M_1 \cdot |x|$ pour tout  $x \subset E$ , on aurait  $|f-f_0| \leq M_1 = M$ , contrairement à l'hypothèse (9).

Ceci dit, nous allons montrer que m est un nombre fini.

Supposons, en effet, que m ne soit pas fini et considérons un ensemble quelconque  $G \subset E$  de puissance m. Rangeons les éléments de G en suite transfinie  $\{x_{\xi}\}$  où  $1 \leq \xi < \theta$ , en désignant par  $\theta$  le plus petit nombre ordinal de puissance m; évidemment 9 est un nombre-limite. En conséquence, pour tout nombre ordinal  $\eta < \vartheta$  la puissance de l'ensemble des termes de la suite  $\{x_{\xi}\}$  où  $1 \le \xi < \eta$  est < m. Par définition de m il existe donc pour tout  $\eta < \theta$  une fonctionnelle linéaire  $f_n \subset \Gamma$  telle que

(11) 
$$|f_{\eta}| \leq M_2$$
 et  $|f_{\eta}(x_{\xi}) - f_0(x_{\xi})| \leq M_1 \cdot |x_{\xi}|$  pour tout  $\xi < \eta$ 

et.  $\Gamma$  étant par hypothèse transfiniment fermé, il existe une fonctionnelle linéaire  $f \subset \Gamma$  qui est une limite transfinie de la suite  $\{f_n\}$  où  $1 \leq \eta < \emptyset$ , donc, d'après (11), qui satisfait aux conditions  $|f| \le M_2$  et  $|f(x_\xi) - f_0(x_\xi)|$  $\leq M_1 \cdot |x_{\xi}|$  pour  $1 \leq \xi < \theta$ , c.-à-d. aux conditions (10). Ainsi, en supposant m non fini, il existerait pour tout ensemble  $G \subset E$  de puissance m un  $f \subset \Gamma$  satisfaisant à (10), contrairement à la définition de m.

Or, m étant fini, il existe un ensemble fini  $G_1 \subset E$  tel qu'aucune fonctionnelle f assujettie aux conditions

$$|f| \le M_2$$
 et  $|f(x) - f_0(x)| \le M_1 \cdot |x|$  pour tout  $x \subset G_1$ 

n'appartient à  $\Gamma$ .

On en déduit aisément par induction l'existence dans E d'une suite  $\{G_i\}$ d'ensembles finis tels qu'aucune fonctionnelle f qui, pour un certain k, remplit les conditions

$$|f| \le M_k$$
 et  $|f(x) - f_0(x)| \le M_i |x|$  pour  $x \subseteq G_i$  et  $i < k$ 

n'appartient à  $\Gamma$ . Par conséquent, si l'on a pour un f:

(12) 
$$|f(x)-f_0(x)| \le M_i \cdot |x|$$
 pour  $x \subset G_i$  et  $i = 1, 2, ...,$ 

la fonctionnelle f n'appartient pas à  $\Gamma$ .

Nous pouvons admettre que les éléments des ensembles  $G_i$ , où i = 1, 2, ...,ont les normes égales à  $M_1/M_1$ ; il suffit à ce but de multiplier ces éléments par des nombres convenables. Si l'on range ensuite les éléments de ces ensembles en une suite  $\{x_n\}$ , en écrivant d'abord ceux de  $G_1$ , puis ceux de  $G_2$  et ainsi de suite on obtient

(13) 
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta \quad \text{et} \quad |x_n| \le 1 \text{ pour tout } n = 1, 2, \dots$$

et si

(14) 
$$|f(x_n)-f_0(x_n)| \le M_1$$
 pour tout  $n = 1, 2, ...,$ 

la fonctionnelle f n'appartient pas à  $\Gamma$ .

Désignons par  $G_0$  l'ensemble de toutes les suites  $\{f(x_n)\}$  pour  $f \subset \Gamma$ . On a évidemment  $G_0 \subset (c)$  et  $\{f_0(x_n)\}\subset (c)$ . En vertu de (14), la distance de  $\{f_0(x_n)\}$  à l'ensemble linéaire  $G_0$  est  $\geqslant M_1$ . Vu la forme générale des fonctionnelles linéaires dans l'espace (c) (cf. Chapitre IV, § 4, p. 74), il existe donc en vertu de lemme (Chapitre IV, § 3), p. 66 (en y posant  $G = G_0$ ), une suite de nombres  $\{C_n\}$  et un nombre C tels que l'on a

(15) 
$$C \lim_{n \to \infty} f_0(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_0(x_n) = 1,$$

(16) 
$$C\lim_{n\to\infty} f(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n f(x_n) = 0$$
 pour tout  $f \subset \Gamma$ 

(17) 
$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \leq \frac{1}{M_1}.$$

En posant donc  $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n$ , on obtient finalement de (15)-(17), en vertu de (13),  $f_0(x_0) = 1$ ,  $f(x_0) = 0$  pour tout  $f \subset \Gamma$  et  $|x_0| \le \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \cdot |x_n|$  $\leq 1/M_1 = 1/M$ , c.q.f.d.

Le lemme 2 qui vient d'être établi implique le suivant

LEMME 3. Les notions d'espaces vectoriels de fonctionnelles linéaires réqulièrement fermés et de ceux transfiniment fermés sont équivalentes.

Démonstration. Si un espace vectoriel  $\Gamma$  de fonctionnelles linéaires est transfiniment fermé, il est fermé au sens ordinaire, ce qui implique immédiatement en vertu du lemme 2 que  $\Gamma$  est un espace régulièrement fermé.

Réciproquement, soient \( \Gamma\) un espace vectoriel régulièrement fermé de fonctionnelles linéaires,  $\{f_i\}$  une suite arbitraire du type  $\theta$  de fonctionnelles appartenant à  $\Gamma$  et dont les normes sont bornées dans leur ensemble, enfin  $f_0$  une fonctionnelle quelconque qui est une limite transfinie de la suite  $\{f_{\xi}\}$ . On a donc

(18) 
$$\lim_{\xi \to \delta} f_{\xi}(x) \leqslant f_{0}(x) \leqslant \overline{\lim}_{\xi \to \delta} f_{\xi}(x) \quad \text{pour tout } x \subset E.$$

Si en conséquence  $f_0$  n'appartenait pas à  $\Gamma$ , il existerait par définition de  $\Gamma$  un élément  $x \subset E$  assujetti aux conditions (1), p. 114, d'où, en particulier,  $f_{\xi}(x) = 0$ , contrairement à (18). On a donc  $f_0 \subset \Gamma$ , de sorte que  $\Gamma$  est transfiniment fermé.

Les lemmes 2 et 3 donnent le

120

Théorème 1. Etant donné un espace vectoriel régulièrement fermé  $\Gamma$  de fonctionnelles linéaires (définies dans E) et une fonctionnelles linéaire  $f_0$  n'appartenant pas à  $\Gamma$ , il existe pour chaque nombre M satisfaisant à la condition

$$0 < M < |f - f_0|$$
 pour tout  $f \subseteq \Gamma$ 

un élément  $x_0 \subset E$  tel que l'on a

$$f_0(x_0) = 1$$
,  $f(x_0) = 0$  pour tout  $f \subset \Gamma$  et  $|x_0| < 1/M$ .

#### § 4. Convergence faible des fonctionnelles linéaires

On dit qu'une suite  $\{f_n\}$  de fonctionnelles linéaires converge faiblement vers la fonctionnelle f, lorsqu'on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \subset E.$$

La fonctionnelle f porte alors le nom de limite faible de la suite  $\{f_n\}$ . La fonctionnelle f(x) est donc additive et mesurable (B); selon le théorème 4 (Chapitre I, § 3), p. 40, elle est donc linéaire. D'autre part, en vertu du théorème 5 (Chapitre V, § 1), p. 85, la suite des normes  $\{|f_n|\}$  est bornée. Enfin, on a

$$|f| \leq \lim_{n \to \infty} |f_n|,$$

car la convergence faible de la suite  $\{f_n\}$  vers f entraı̂ne  $\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = |f(x)|$  pour tout x, et comme  $|f_n(x)| \le |f_n| \cdot |x|$  pour n = 1, 2, ..., on a  $|f(x)| \le |x| \cdot \lim_{n\to\infty} |f_n|$ , d'où la formule (19).

On en déduit aisément le

Théorème 2. Pour qu'une suite  $\{f_n(x)\}$  de fonctionnelles linéaires converge faiblement vers la fonctionnelle f(x), il faut et il suffit que l'on ait simultanément

(20) la suite 
$$\{|f_n|\}$$
 bornée

et

(21)  $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$  pour tout élément x d'un ensemble dense (ou fondamental).

Théorème 3. Si l'espace E est séparable, toute suite de fonctionnelles linéaires  $\{f_n\}$  dont l'ensemble des normes est borné contient une suite partielle faiblement convergente.

Démonstration. Il suffit, en effet, d'extraire de la suite  $\{f_n\}$  une suite partielle, convergente dans un ensemble dense dénombrable, ce qui est facile de faire par le procédé de la diagonale.

## § 5. Ensembles faiblement fermés de fonctionnelles linéaires dans les espaces du type (B) séparables

Etant donnés deux ensembles de fonctionnelles linéaires  $\Delta$  et  $\Gamma$  où  $\Delta \subset \Gamma$ , l'ensemble  $\Delta$  est dit faiblement dense dans  $\Gamma$ , lorsque pour tout  $f \subset \Gamma$  il existe dans  $\Delta$  une suite  $\{f_n\}$  qui converge faiblement vers f.

L'ensemble  $\Gamma$  de fonctionnelles linéaires s'appelle faiblement fermé, lorsque  $\Gamma$  admet comme élément toute fonctionnelle f qui est la limite faible d'une suite de fonctionnelles appartenant à  $\Gamma$ .

Théorème 4. Si l'espace E est séparable, tout ensemble  $\Gamma$  de fonctionnelles linéaires définies dans E contient un sous-ensemble dénombrable  $\Delta$  faiblement dense dans  $\Gamma$ .

Démonstration. On peut se borner au cas où les normes des fonctionnelles de  $\Gamma$  sont bornées dans leur ensemble, car tout ensemble de fonctionnelles est une somme tout au plus d'une infinité dénombrable d'ensembles ayant cette propriété.

Soient  $\{x_n\}$  la suite dense E et  $Z_n$  pour n=1,2,... l'ensemble des points de l'espace n-dimensionnel à coordonnées

(22) 
$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$$

pour tous les  $f \subset \Gamma$ . Il existe évidemment pour tout n un ensemble dénombrable  $\Delta_n \subset \Gamma$  tel que les points à coordonnées (22) pour  $f \subset \Delta_n$  forment un ensemble dense dans  $Z_n$ . L'ensemble  $\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n$  est évidemment dénombrable et il existe pour tout  $f \subset \Gamma$  une suite  $\{f_n\}$  satisfaisant aux conditions  $f_n \subset \Delta_n \subset \Delta$  et  $|f_n(x_i) - f(x_i)| < 1/n$  pour tout i = 1, 2, ..., n, donc qui converge faiblement vers f, puisque, les fonctionnelles  $f_n$  appartenant à  $\Delta \subset \Gamma$ , l'ensemble de leurs normes est borné par hypothèse.

THÉORÈME 5. Pour les espaces E du type (B) séparables les notions d'ensembles linéaires de fonctionnelles linéaires (définies dans E) régulièrement fermé et faiblement fermé sont équivalentes.

Démonstration. Soit, d'une part,  $\{f_n\}$  une suite de fonctionnelles linéaires appartenant à  $\Gamma$  et qui converge faiblement vers une fonctionnelle  $f_0$ . On a donc

(23) 
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x) \quad \text{pour tout } x \subset E.$$

Si  $f_0$  n'appartenait pas à l'ensemble  $\Gamma$ , supposé régulièrement fermé, il existerait par définition de cette notion un élément  $x_0 \subset E$  satisfaisant aux conditions

(24) 
$$f_0(x_0) = 1$$
 et  $f(x_0) = 0$  pour tout  $f \subset \Gamma$ .

Comme  $f_n \subset \Gamma$ , on aurait par conséquent  $f_n(x_0) = 0$  pour tout n = 1, 2, ..., d'où, en vertu de (23),  $f_0(x_0) = 0$ , contrairement à (24). Il en résulte que  $f_0 \subset \Gamma$ ; l'ensemble  $\Gamma$  est donc faiblement fermé(1).

D'autre part, en vertu du lemme 3, p. 119, il suffit de montrer que l'ensemble  $\Gamma$ , supposé faiblement fermé, est transfiniment fermé.

Soient  $\{f_{\xi}\}$  une suite du type  $\theta$  telle que

(25) 
$$f_{\xi} \subset \Gamma \text{ et } |f_{\xi}| \leq M \quad \text{ où } \quad 1 \leq \xi < \vartheta$$

et  $\{x_i\}$  une suite dense dans E. Il existe, en raison de l'hypothèse, pour tout n naturel un  $\xi_n$  ordinal tel que

(26) 
$$\lim_{\xi \to \vartheta} f_{\xi}(x_i) - \frac{1}{n} \leqslant f_{\xi_n}(x_i) \leqslant \overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} f_{\xi}(x_i) + \frac{1}{n} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Or, l'espace E étant séparable, on peut en vertu du théorème 3, p. 121, extraire de la suite  $\{f_{\xi_n}\}$  une suite partielle faiblement convergente. En désignant par f la limite faible de la suite  $\{f_{\xi_n}\}$ , on a en vertu de (25)  $f \subset \Gamma$  et, en même temps, on conclut de (26) que f est une limite transfinie de la suite  $\{f_{\xi}\}$ .

Les théorèmes 1, p. 120, et 5, p. 121, qui vient d'être établi, entraînent immédiatement le

Théorème 6. Si l'espace E du type (B) est séparable, alors étant donné un ensemble vectoriel faiblement fermé  $\Gamma$  de fonctionnelles linéaires définies dans E et une fonctionnelle linéaire quelconque  $f_0$  n'appartenant pas à  $\Gamma$ , il existe pour chaque nombre M satisfaisant à la condition

$$0 < M < |f-f_0|$$
 pour tout  $f \subseteq \Gamma$ 

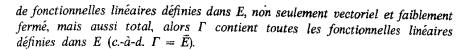
un élément  $x_0 \subseteq E$  tel que l'on a

$$f_0(x_0) = 1$$
,  $f(x_0) = 0$  pour tout  $f \subset \Gamma$  et  $|x_0| < 1/M$ .

Le théorème 5 entraıne en vertu du lemme 3, p. 119, l'équivalence des notions d'ensembles linéaires régulièrement, transfiniment et faiblement fermés de fonctionnelles linéaires dans les espaces E du type (B) séparables.

Il en résulte, en tenant compte de la remarque, p. 116, le

Théorème 7. Si l'espace E du type (B) est séparable et  $\Gamma$  est un ensemble



# § 6. Conditions pour la convergence faible des fonctionnelles linéaires définies dans les espaces (C), $(L^{(p)})$ , (c) et $(l^{(p)})$

Nous passons à étudier successivement la convergence faible des fonctionnelles linéaires dans quelques espaces particuliers du type (B) séparables. Tels sont les espaces (C),  $(L^{(p)})$  pour  $p \ge 1$ , (c) et  $(l^{(p)})$  pour  $p \ge 1$ .

L'ensemble dense dénombrable constituent: dans (C) et  $(L^{(p)})$  les polynômes à coefficients rationnels, dans (c), resp. dans  $(l^{(p)})$ , les suites de nombres rationnels dont tous les termes à partir d'un indice suffisamment élevé restent constants, resp. sont égaux à 0.

Espaces  $(L^{(p)})$  où p > 1. Toute fonctionnelle linéaire f(x) définie dans  $(L^{(p)})$  étant (cf. Chapitre IV, § 4, p. 72) de la forme

(27) 
$$\int_0^1 x(t) \alpha(t) dt \qquad \text{où} \qquad \alpha(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}),$$

la suite des fonctionnelles .

(28) 
$$\{f_n(x)\} = \{\int_0^1 x(t)\alpha_n(t)dt\} \quad \text{où} \quad \alpha_n(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$$

converge faiblement vers la fonctionnelle (27), lorsqu'on a

(29) 
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)\alpha_n(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\alpha(t)\,dt$$

pour toute fonction  $x(t) \subset (L^{(p)})$ .

Or, on peut montrer aisément que pour la convergence faible de la suite (28) vers la fonctionnelle (27), il faut et il suffit que l'on ait simultanément:

(30) 
$$la suite \left\{ \int_{0}^{1} |\alpha_{n}(t)|^{\frac{p}{p-1}} dt \right\} bornée$$

et

(31) 
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^u \alpha_n(t)\,dt = \int_0^u \alpha(t)\,dt \quad \text{pour} \quad 0 \leq u \leq 1(1).$$

La démonstration résulte du théorème 2, p. 120, étant donné que l'on a

$$||f_n|| = \left[\int_0^1 |\alpha_n(t)|^{\frac{p}{p-1}} dt\right]^{\frac{p-1}{p}},$$

<sup>(1)</sup> On voit donc que la séparabilité de E n'intervient pas dans cette partie de la démonstration.

<sup>(1)</sup> Ces conditions ont été données par F. Riesz, l. c., Mathematische Annalen 69 (1910), p. 449-497.

125

que, en outre, les fonctions  $x_u(t)$  définies pour  $0 \le u \le 1$  par les conditions

$$x_{u}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 \le t \le u, \\ 0 & \text{pour} \quad u < t \le 1, \end{cases}$$

forment un ensemble total dans  $(L^{(p)})$  et enfin que

$$\int_{0}^{1} x_{u}(t) \alpha_{n}(t) dt = \int_{0}^{u} \alpha_{n}(t) dt$$

pour tout n = 1, 2, ...

Espace (L). Toute fonctionnelle linéaire f(x) définie dans (L) étant de la forme

(32) 
$$f(x) = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt \quad \text{où} \quad \alpha(t) \subset (M)$$

(cf. Chapitre IV, § 4, p. 73), la suite des fonctionnelles

(33) 
$$\{f_n(x)\} = \{\int_0^1 x(t) \alpha_n(t) dt\} \quad \text{où} \quad \alpha_n(t) \subset (M)$$

converge faiblement vers la fonctionnelle (32), lorsqu'on a

(34) 
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x(t)\alpha_n(t)dt = \int_0^1 x(t)\alpha(t)dt \quad \text{pour tout } x(t) \subset (L).$$

On montre comme dans le cas qui précède que pour la convergence faible de la suite de fonctionnelles linéaires (33) vers la fonctionnelle (32), il faut et il suffit d'avoir simultanément:

(35) les fonctions de la suite  $\{\alpha_n(t)\}$  bornées dans leur ensemble, en dehors tout au plus d'un ensemble de valeurs de t de mesure lebesquienne nulle,

(36) 
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} \alpha_n(t)\,dt = \int_0^{\infty} \alpha(t)\,dt \quad pour \quad 0 \leq u \leq 1 \,(^1).$$

Remarque. Les conditions (30) et (31) sont évidemment nécessaires et suffisantes pour que l'on ait la propriété (29). Il en est de même des conditions (35) et (36) pour la propriété (34).

Espaces  $(l^{(p)})$  où  $p \ge 1$ . Toute fonctionnelle linéaire f(x) définie dans  $(l^{(p)})$  étant de la forme

(37) 
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$$

où 
$$x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$$
 et  $\{\alpha_i\} \subset \begin{cases} {l^{(\frac{p}{p-1})}} \text{ pour } p > 1, \\ {(M)} \text{ pour } p = 1, \end{cases}$ 

(cf. Chapitre IV, § 4, p. 75-76), la suite des fonctionnelles

(38) 
$$\{f_n(x)\} = \{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in} \xi_i\} \quad \text{où} \quad \{\alpha_{in}\} \subset \begin{cases} (l^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}) \text{ pour } p > 1, \\ (M) \text{ pour } p = 1, \end{cases}$$

converge faiblement vers la fonctionnelle (37), lorsqu'on a

(39) 
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{in}\,\xi_i=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\xi_i\quad\text{ pour tout }x=\{\xi_i\}\subset(l^{(p)}).$$

Pour que la suite des fonctionnelles linéaires (38) converge faiblement vers la fonctionnelle (37), il faut et il suffit que l'on ait simultanément

(40) 
$$la \ suite \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}|^{\frac{p}{p-1}} \right\} & pour \quad p > 1 \\ \left\{ borne \sup_{1 \leq i < \infty} |\alpha_{in}| \right\} & pour \quad p = 1 \end{cases} bornée,$$

(41) 
$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{in}=\alpha_i \quad pour \quad i=1,2,...$$

La démonstration résulte du théorème 2, § 4, p. 120, en s'appuyant sur le fait que les éléments

$$x_j = \{\xi_{ij}\}$$
 où  $\xi_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j, \\ 0 & \text{pour } i \neq j, \end{cases}$ 

forment une suite totale dans  $(l^{(p)})$  et que l'on a en outre  $f_n(x_j) = \alpha_{jn}$  pour tous j et n naturels; on tiendra compte enfin de la représentation de la norme des fonctionnelles linéaires dans les espaces  $(l^{(p)})$ , donnée p. 76.

Remarque. Les conditions (40) et (41) sont en même temps nécessaires et suffisantes pour (39).

Espace (c). Vu la forme générale des fonctionnelles linéaires définies dans (c)

$$(42) f(x) = A \lim_{i \to \infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \text{où} x = \{\xi_i\} \subset (c) \text{ et } \{\alpha_i\} \subset (l)$$

(cf. Chapitre IV, § 4, p. 73), la suite des fonctionnelles linéaires

$$(43) \quad \left\{ f_n(x) \right\} = \left\{ A_n \lim_{l \to \infty} \xi_l + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in} \xi_i \right\} \text{ où } \left\{ \alpha_{in} \right\} \subset (l) \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

converge faiblement vers la fonctionnelle (42), lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \left[ A_n \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in} \xi_i \right] = A \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \quad \text{pour tout } x = \{\xi_i\} \subset (c).$$

<sup>(1)</sup> Ces conditions ont été trouvées par M. H. Lebesgue.

On montre facilement que pour la convergence faible de la suite (43) vers la fonctionnelle (42), il faut et il suffit d'avoir simultanément

(45) 
$$la suite \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}| + |A_n| \right\} bornée,$$

(46) 
$$\lim_{n\to\infty} \left(A_n + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{in}\right) = A + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_{in} = \alpha_i \quad pour \quad i=1,2,...$$

### § 7. Compacticité faible d'ensembles bornés dans certains espaces

Les resultats qui précèdent permettent de déduire en vertu du théorème 3, p. 121, les théorèmes suivants.

Pour  $(L^{(p)})$  où p > 1. Toute suite de fonctions  $\{\alpha_n(t)\}$ , où  $\alpha_n(t) \subset (L^{(p)})$ , assujettie à la condition

$$\int_{0}^{1} |\alpha_{n}(t)|^{p} dt < M,$$

où M est un nombre indépendant de n, contient une suite partielle  $\{\alpha_{n_i}(t)\}$  telle que l'on a pour une fonction  $\alpha_0(t) \subset (L^{(p)})$ :

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^1\alpha_{n_t}(t)\,x(t)\,dt=\int_0^1\alpha_0(t)\,x(t)\,dt\quad pour\ tout\ x(t)\subset(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})(^1).$$

En effet, les expressions  $\int_0^\infty \alpha_n(t) x(t) dt$  pour tout n = 1, 2, ..., peuvent être regardées comme des fonctionnelles linéaires définies dans  $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ . L'ensemble de leurs normes étant borné et l'espace  $(L^{(\frac{p}{p-1})})$  étant séparable, on peut d'après le théorème 3 p. 121 extraire de la suite  $\{\alpha_n(t)\}$  une suite

L'ensemble de leurs normes etant borne et l'espace  $(L^{p})$ ) etant separable, on peut d'après le théorème 3, p. 121, extraire de la suite  $\{\alpha_n(t)\}$  une suite faiblement convergente; on n'a ensuite qu'à appliquer l'énoncé établi pour les espaces  $(L^{(p)})$  au § 6, p. 123.

Pour (M). Toute suite de fonctions  $\{\alpha_n(t)\}$  où  $\alpha_n(t) \subset (M)$  dont les normes sont bornées dans leur ensemble contient une suite partielle  $\{\alpha_{n_i}(t)\}$  telle que l'on a pour une fonction  $\alpha_0(t) \subset (M)$ :

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^1\alpha_{n_t}(t)x(t)dt=\int_0^1\alpha_0(t)x(t)dt\quad pour\ tout\ x(t)\subset (L).$$

La démonstration est analogue à la précédente.

Pour  $(l^{(p)})$  où p > 1 et (m) on a des théorèmes analogues.

§ 8. Fonctionnelles linéaires faiblement continues définies dans les espaces des fonctionnelles linéaires

F(f) où  $f \subset \overline{E}$  désignant une fonctionnelle définie dans l'ensemble  $\overline{E}$  de toutes les fonctionnelles linéaires (définies dans E supposé un espace du type (B)), nous appelons la fonctionnelle F(f) faiblement continue, lorsqu'on a  $\lim_{n\to\infty} F(f_n) = F(f)$  pour toute suite  $\{f_n\}$  de fonctionnelles linéaires faiblement convergente vers f.

Théorème 8. Si l'espace E du type (B) est séparable et la fonctionnelle linéaire F(f) définie pour  $f \subset \bar{E}$  est faiblement continue, il existe un élément  $x_0 \subset E$  tel que l'on a

(47) 
$$F(f) = f(x_0) \quad \text{pour tout } f \subset \bar{E}.$$

Démonstration.  $\Gamma$  désignant l'ensemble de toutes les fonctionnelles  $f \subset \overline{E}$  qui remplissent l'équation F(f)=0, la continuité faible de F a pour conséquence facile que  $\Gamma$  est un ensemble linéaire faiblement fermé. On peut évidemment admettre que  $\Gamma \neq \overline{E}$ . Soit donc  $f_0$  une fonctionnelle linéaire remplissant l'équation

(48) 
$$F(f_0) = 1.$$

Il en résulte en vertu du théorème 6, p. 122, l'existence d'un  $x_0 \subset E$  tel que l'on a

(49) 
$$f_0(x_0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x_0) = 0 \quad \text{pour tout } f \subset \Gamma.$$

Or, l'identité

(50) 
$$f = f_0 \cdot F(f) + \varphi$$
 pour tout  $f \subset \overline{E}$ , où  $\varphi = f - f_0 \cdot F(f)$ ,

donne, selon (48),  $F(\varphi) = 0$ , d'où  $\varphi \subset \Gamma$  et par conséquent, d'après (49),  $\varphi(x_0) = 0$ , ce qui entraîne en vertu de (50) la propriété (47), q.f.d.

Remarque. Si l'espace E n'est pas séparable, le théorème 8 reste vrai, pourvu que la fonctionnelle F(f) soit linéaire et l'ensemble désigné par  $\Gamma$  soit régulièrement fermé (ce qui permet de faire appel dans le raisonnement au théorème 1, p. 120, au lieu du théorème 6, p. 122).

<sup>(1)</sup> Ce théorème est dû à M. F. Riesz, l. c., p. 466-467.



#### CHAPITRE IX

## Suites faiblement convergentes d'éléments

## § 1. Définition. Conditions pour la convergence faible des suites d'éléments

Une suite  $\{x_n\}$  d'éléments de E s'appelle faiblement convergente vers l'élément  $x \subset E$ , lorsqu'on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \text{pour tout } f \subset \bar{E},$$

c.-à-d. pour toute fonctionnelle linéaire f définie dans l'espace donne E.

Théorème 1. Pour que la suite  $\{x_n\}$  converge faiblement vers x, il faut et il suffit d'avoir simultanément

(1) la suite 
$$\{|x_n|\}$$
 bornée et

(2)  $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$  pour tout  $\varphi \subset \Delta$  où  $\Delta$  est un ensemble dense dans  $\bar{E}$ .

Démonstration. La nécessité de (1) résulte du théorème 6 (Chapitre V, § 1), p. 86, et celle de (2) est évidente.

Pour en démontrer la suffisance, considérons une fonctionnelle quelconque  $f \subset \overline{E}$ . En vertu de (2), il existe alors pour tout nombre  $\varepsilon > 0$ une fonctionnelle  $\varphi \subset \Delta$  telle que  $|\varphi - f| < \varepsilon/2M$ , où M désigne la borne supérieure des nombres  $|x_n|$  et |x|, qui existe d'après (1). Par conséquent,

$$|f(x-x_n)| \leq |\varphi(x-x_n)| + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot |x-x_n| \leq |\varphi(x-x_n)| + \varepsilon;$$

comme  $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x)$  et  $\varepsilon$  est arbitraire, on en conclut que  $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ , c.-à-d. que la suite  $\{x_n\}$  converge faiblement vers x.

Remarque. Il suffit d'ailleurs d'admettre de  $\Delta$  que les combinaisons linéaires formées de fonctionnelles appartenant à l'ensemble  $\Delta$  constituent un ensemble dense dans  $\bar{E}$ .

Théorème 2. Si la suite  $\{x_n\}$  converge faiblement vers x, il existe une suite  $\{g_n\}$  de combinaisons linéaires d'éléments de  $\{x_n\}$  telle que  $\lim_{n\to\infty}g_n=x$ .

La démonstration résulte du théorème 6 (Chapitre IV, § 3), p. 67, et de la définition de la convergence faible des d'éléments.

## § 2. Convergence faible des suites d'éléments dans les espaces (C), $(L^{(p)})$ , (c) et $(l^{(p)})$

Envisageons à présent la convergence faible des suites d'éléments dans les espaces particuliers les plus importants.

Espace (C). Etant donnée la forme générale des fonctionnelles linéaires définies dans (C) (voir p. 69), pour qu'une suite de fonctions continues  $\{x_n(t)\}$  converge faiblement vers la fonction continue x(t), il faut et il suffit que l'on ait

(3) 
$$\lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1} x_{n}(t) dg(t) = \int_{0}^{1} x(t) dg(t)$$

pour toute fonction g(t) à variation bornée.

Il en résulte que pour la convergence faible d'une suite de fonctions  $\{x_n(t)\}\ où\ x_n(t)\subset (C)\ vers la fonction\ x(t)\subset (C),\ il\ faut\ et\ il\ suffit\ d'avoir simultanément$ 

- (4) les fonctions  $x_n(t)$  où n = 1, 2, ... bornées dans leur ensemble,
- (5)  $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) \text{ pour tout } t \subset [0,1].$

En effet, la nécessité de (4) résulte du théorème 1, p. 128, et celle de (5) est une conséquence du fait que,  $t_0$  désignant un point arbitraire de [0, 1], la fonctionnelle  $f(x) = x(t_0)$  est linéaire, d'où  $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$  et par conséquent  $\lim_{n \to \infty} x_n(t_0) = x(t_0)$ .

La suffisance consiste en ce que les conditions (4) et (5) entraı̂nent l'égalité (3) pour toute fonction g(t) à variation bornée (cf. Introduction,  $\S 5$ , p. 28).

Ceci établi, on obtient du théorème 2, le théorème suivant:

Si une suite de fonctions continues  $\{x_n(t)\}$  où  $0 \le t \le 1$  est bornée et converge partout vers une fonction continue x(t), il existe une suite de polynômes formés de termes de la suite  $\{x_n(t)\}$  et qui converge vers x(t) uniformément.

C'est une propriété remarquable de l'espace des fonctions continues et qui est en défaut p. ex. déjà pour les fonctions de la première classe de Baire. Espaces  $(L^{(p)})$  où p>1. La suite  $\{x_n(t)\}$  où  $x_n(t)\subset (L^{(p)})$  converge faiblement vers  $x(t)\subset (L^{(p)})$ , lorsqu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$$

pour toute fonction  $\alpha(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$ .

Il résulte en vertu de la remarque, p. 124, le théorème suivant:

Pour la convergence faible d'une suite de fonctions  $\{x_n(t)\}$  où  $x_n(t) \subset (L^{(p)})$  vers la fonction  $x(t) \subset (L^{(p)})$ , il faut et il suffit d'avoir à la fois

(6) 
$$la suite \left\{ \int_{0}^{1} |x_{n}(t)|^{p} dt \right\} bornée$$

et

(7) 
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^u x_n(t)\,dt = \int_0^u x(t)\,dt \quad pour \quad 0 \leqslant u \leqslant 1 \,(^1).$$

Espace (L). La suite  $\{x_n(t)\}$  converge faiblement vers  $x_0(t)$  où  $x_n \subset (L)$ ,  $x_0 \subset (L)$  et  $0 \le t \le 1$ , lorsqu'on a

(8) 
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt = \int_0^1 x_0(t)\,\alpha(t)\,dt$$

pour toute fonction bornée  $\alpha(t)$ .

Il en résulte le théorème suivant:

Pour la convergence faible de la suite de fonctions  $\{x_n(t)\}$  appartenant à (L) vers la fonction  $x_0(t) \subset (L)$ , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies simultanément:

(9) 
$$la suite \left\{ \int_{0}^{1} |x_{n}(t)| dt \right\} est bornée,$$

(10) il existe pour tout nombre  $\varepsilon > 0$  un nombre  $\eta > 0$  tel que l'on ait  $\left| \int_{H} x_{n}(t) dt \right| \leq \varepsilon \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \dots$ 

pour tout ensemble H de mesure  $< \eta$  de valeurs de  $t(^2)$ ,

(11) 
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^u x_n(t)\,dt = \int_0^u x_0(t)\,dt \quad pour \quad 0 \leq u \leq 1.$$

En effet, (8) équivant à l'égalité  $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [x_n(t)-x_0(t)] \alpha(t) dt = 0$  pour  $\alpha(t) \subset (M)$ ; le théorème en question s'en déduit facilement à l'aide du théorème de Lebesgue énoncé p. 28 (voir Introduction, § 6).

Espace (c). Pour qu'une suite  $\{x_n\}$  où  $x_n = \{\xi_i^n\} \subset$  (c) converge faiblement vers l'élément  $x = \{\xi_i\} \subset$  (c), il faut et il suffit d'avoir à la fois:

(12) 
$$la suite \{|x_n|\} bornée,$$

(13) 
$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^n = \xi_i \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} (\lim_{i\to\infty} \xi_i^n) = \lim_{i\to\infty} \xi_i.$$

La démonstration est immédiate, étant donné que toute fonctionnelle linéaire dans (c) est de la forme  $f(x) = C \lim_{i \to \infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i$  où  $x = \{\xi_i\}$  et  $|f| = |C| + \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|$  (voir p. 74) et en tenant compte du fait que, si l'on pose

$$f_i(x) = \begin{cases} \lim_{i \to \infty} \xi_i & \text{pour} \quad i = 0, \\ \xi_i & \text{pour} \quad i \ge 1, \end{cases}$$

les combinaisons linéaires de termes de la suite  $\{f_i(x)\}$  où i = 0, 1, 2, ..., constituent un ensemble dense dans celui de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans (c).

Espaces  $(l^{(p)})$  où p > 1. Pour qu'une suite  $\{x_n\}$  où  $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \subset (l^{(p)})$  converge faiblement vers  $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$ , il faut et il suffit que l'on ait simultanément

(14) la suite des nombres 
$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\right\}$$
 bornée et

(15) 
$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \quad pour \ tout \quad i=1,2,...$$

La démonstration résulte de la remarque, p. 125.

Espace (l). Pour qu'une suite  $\{x_n\}$  où  $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \subset (l)$  converge faiblement vers  $x = \{\xi_i\} \subset (l)$ , il faut et il suffit que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-x|=0,\quad \text{c'est-à-dire},\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|=0.$$

En conséquence:

Dans l'espace (l) la convergence faible est équivalente à la convergence suivant la norme.

<sup>(1)</sup> Ce théorème a été démontré par M. F. Riesz, l. c., Mathematische Annalen 69 (1910), p. 465-466.

<sup>(2)</sup> Cette condition (10) implique d'ailleurs la condition (9).

Démonstration. Admettons que  $\{x_n\}$  converge faiblement vers x. En posant  $\eta_i^{(n)} = \xi_i^{(n)} - \xi_i$ , la suite  $\{y_n\}$  où  $y_n = \{\eta_i^{(n)}\}$  converge donc faiblement vers  $\Theta$  avec  $n \to \infty$ . On a par conséquent pour toute suite bornée de nombres  $\{c_i\}$ 

(16) 
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_{i}\eta_{i}^{(n)}=0.$$

Soit

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{pour } j = i, \\ 0 & \text{pour } j \neq i, \end{cases}$$

d'où

(17) 
$$\lim_{n\to\infty}\eta_j^{(n)}=0 \quad \text{pour tout } j=1,2,...$$

Il s'agit de montrer que l'on a

(18) 
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i^{(n)}| = \lim_{n \to \infty} |y_n| = 0.$$

Supposons par contre que

(19) 
$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|\eta_{l}^{(n)}|>\varepsilon>0.$$

Définissons par induction deux suites croissantes de nombres naturels  $\{n_k\}$  et  $\{r_k\}$  comme il suit:

1°  $n_1$  est le plus petit n tel que  $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i^{(n)}| > \varepsilon$ ,

 $2^{\circ} r_1$  est le plus petit r tel que  $\sum_{i=1}^{r} |\eta_i^{(n_1)}| > \varepsilon/2$  et  $\sum_{i=r+1}^{\infty} |\eta_i^{(n_1)}| < \varepsilon/5$ ,

3°  $n_k$  est le plus petit nombre naturel dépassant  $n_{k-1}$  et tel que  $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i^{(n_i)}| > \varepsilon \text{ et } \sum_{i=1}^{r_{k-1}} |\eta_i^{(n_i)}| < \varepsilon/5,$ 

 $4^{\circ} r_k$  est le plus petit nombre naturel dépassant  $r_{k-1}$  et tel que  $\sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} |\eta_i^{(n_i)}| > \varepsilon/2 \text{ et } \sum_{i=r_k+1}^{\infty} |\eta_i^{(n_i)}| < \varepsilon/5.$ 

Les suites  $\{n_k\}$  et  $\{r_k\}$  ainsi définies existent en vertu de (17) et (19). Or, soit maintenant

(20) 
$$c_i = \begin{cases} \operatorname{sign} \eta_i^{(n_i)} & \text{pour } 1 \leq i \leq r_1, \\ \operatorname{sign} \eta_i^{(n_{k+1})} & \text{pour } r_k < i \leq r_{k+1}. \end{cases}$$

On a donc  $|c_i| = 1$  pour tout i = 1, 2, ..., d'où selon (16)

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_{i}\eta_{i}^{(n_{k})}=0.$$

Mais, d'après (20), on a

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i^{(n_k)} \right| \geqslant \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} \left| \eta_i^{(n_k)} \right| - \sum_{i=1}^{r_{k-1}} \left| \eta_i^{(n_k)} \right| - \sum_{i=r_k+1}^{\infty} \left| \eta_i^{(n_k)} \right|,$$

d'où, en vertu de 3° et 4°,

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}c_{i}\eta_{i}^{(n,j)}\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{5}-\frac{\varepsilon}{5}=\frac{\varepsilon}{10}$$

pour tout k = 1, 2, ..., ce qui est incompatible avec (21). On a donc l'égalité (18), c.q.f.d.

## § 3. Relation entre la convergence faible et forte dans les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ pour p > 1

Au sujet de la relation entre la convergence faible d'éléments et celle selon la norme on peut énoncer pour les espaces  $(L^{(p)})$  et  $(l^{(p)})$  où p > 1 les théorèmes plus généraux suivants:

Si la suite  $\{x_n(t)\}$ , où  $x_n(t) \subset (L^{(p)})$  et p > 1, converge faiblement vers  $x(t) \subset (L^{(p)})$  et si en outre

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} |x_{n}(t)|^{p} dt = \int_{0}^{1} |x(t)|^{p} dt,$$

alors la suite  $\{x_n(t)\}$  converge vers x(t) selon la norme, c.-à-d. que l'on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}|x_{n}(t)-x(t)|^{p}dt=0(^{1}).$$

Nous allons démontrer le théorème analogue pour les espaces  $(l^{(p)})$  où p > 1 (le cas p = 1 étant envisagé au § 2, qui précède).

Si la suite  $\{x_n\}$ , où  $x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \subset (l^{(p)})$  et  $p \ge 1$ , converge faiblement vers  $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$  et si l'on a

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|x|,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-x|=0.$$

Démonstration. On a d'après (15), p. 131,

$$\lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i$$

<sup>(1)</sup> Ce théorème a été démontré pour la première fois par M. Radon (Sitzungsberichte der Akad. für Wissensch. in Wien, 122 (1913), Abt. II-a, p. 1295-1438). Cf. aussi F. Riesz, Acta Litt. Ac. Scient. Szeged, 4 (1929), p. 58-64 et 182-185.

et

(24) 
$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p},$$

où N est un nombre naturel arbitraire. Or,

$$\sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty}|\xi_i^{(\mathbf{n})}-\xi_i|^p} \, \leqslant \, \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty}|\xi_i^{(\mathbf{n})}|^p} \, + \, \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty}|\xi_i|^p} \, ,$$

d'où par l'hypothèse et d'après (23) et (24)

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i|^p\leqslant \left[2\sqrt[p]{\sum_{l=N}^{\infty}|\xi_l|^p}\right]^p=2^p\sum_{l=N}^{\infty}|\xi_l|^p.$$

Comme  $\lim_{N\to\infty}\sum_{i=N}^{\infty}|\xi_i|^p=0$  et N est arbitraire, on en tire l'égalité (22), q.f.d.

#### § 4. Espaces faiblement complets

Etant donné dans un espace E du type (B) une suite d'éléments  $\{x_n\}$  telle que  $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$  existe pour toute fonctionnelle linéaire f(x) définie dans E, il peut n'exister aucun élément  $x_0 \subset E$  vers lequel la suite  $\{x_n\}$  soit faiblement convergente, c.-à-d. tel que l'on ait  $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$  pour toutes les fonctionnelles linéaires  $f\subset \bar{E}$  à la fois.

En voici un exemple dans l'espace (C). Soit  $\{x_n(t)\}$  où  $0 \le t \le 1$  une suite de fonctions continues, bornées dans leur ensemble et convergeant partout vers une fonction z(t) qui n'est pas continue. La limite  $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t) dg$  existe alors pour toute fonction g(t) à variation bornée (cf. Introduction, § 5, p. 28), mais la suite  $\{x_n(t)\}$  ne converge faiblement vers aucune fonction continue.

Cependant on a le théorème:

Dans les espaces  $(L^{(p)})$  et  $(l^{(p)})$  où  $p \ge 1$  l'existence de  $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$  pour une suite  $\{x_n\}$ , quelle que soit la fonctionnelle linéaire f, entraı̂ne la convergence faible de la suite  $\{x_n\}$  vers un élément  $x_0$ .

Démonstration pour (L). Si  $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\alpha(t)dt$ , où  $x_n(t)\subset (L)$ , existe pour toute fonction  $\alpha(t)\subset (M)$ , on a évidemment

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\q\to\infty}}\int_0^1 \left[x_p(t)-x_q(t)\right]\alpha(t)\,dt=0\quad\text{ pour tout }\alpha(t)\subset(M).$$

Nous allons montrer qu'il existe pour tout  $\varepsilon > 0$  un  $\eta > 0$  et un N naturel tels que l'on a

(25) 
$$\int_{H} |x_{N}(t) - x_{n}(t)| dt < \varepsilon,$$

pour tout  $n \ge N$  et pour tout ensemble H de mesure  $< \eta$ .

En effet, il existerait dans le cas contraire deux suites infiniment croissantes de nombres naturels  $\{p_k\}$  et  $\{n_k\}$  et une suite d'ensembles  $\{H_k\}$  de mesure tendant vers 0 telles que  $\int\limits_{H_k} |x_{p_k}(t) - x_{n_k}(t)| \, dt \geqslant \varepsilon$ , d'où

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 \left[x_{p_k}(t)-x_{n_k}(t)\right]\alpha(t)\,dt=0\quad \text{ pour tout }\alpha(t)\subset(M),$$

contrairement au théorème de Lebesgue (voir Introduction, § 6, p. 28).

Ceci établi, on a donc en particulier, si  $\eta$  est suffisamment petit,  $\int_{H} |x_n(t)| dt < \frac{1}{2} \varepsilon$  pour tout n = 1, 2, ..., N, d'où selon (25),

(26) 
$$\int_{H} |x_n(t)| dt < \frac{3}{2}\varepsilon \quad \text{pour tout } n = 1, 2, ...,$$

pourvu que la mesure de H soit  $< \eta$ . Posons

(27)  $\lim_{n\to\infty}\int_{t}^{t}x_{n}(u)du=\beta(t).$ 

Nous allons montrer que la fonction  $\beta(t)$  est absolument continue. En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe d'après (26) un  $\eta > 0$  tel que l'on a  $\int_H |x_n(t)| dt < \varepsilon$  pour n = 1, 2, ..., et pour tout ensemble H de mesure  $< \eta$ .

En particulier, si H se compose d'un nombre fini de segments à extrémités  $t_i$  et  $t'_i$  n'empiétant pas l'un sur l'autre, on a donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_{H}x_{n}(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{i}\int_{t_{i}}^{t_{i}}x_{n}(t)\,dt=\sum_{i}\left[\beta(t_{i}')-\beta(t_{i})\right],$$

d'où  $\left|\sum_{i} [\beta(t'_{i}) - \beta(t_{i})]\right| \le \varepsilon$ , ce qui exprime la continuité absolue de la fonction  $\beta(t)$ .

Ceci étant, on n'a qu'à poser  $\beta'(t) = x_0(t)$  pour conclure de (27) et des conditions pour la convergence faible, établies p. 124, que la suite  $\{x_n(t)\}$  converge faiblement vers  $x_0(t)$ .

Démonstration pour  $(L^{(p)})$  où p > 1. Admettons que  $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x_n(t) y(t) dt$ , où  $x_n(t) \subset (L^{(p)})$  quel que soit n = 1, 2, ..., existe pour tout  $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ .



Les fonctionnelles  $f_n(y) = \int_0^1 x_n(t) y(t) dt$  sont évidemment linéaires dans  $(L^{(\frac{p}{p-1})})$  et comme, par hypothèse,  $\lim_{n\to\infty} f_n(y)$  existe pour tout  $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ , la fonctionnelle  $f(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y)$  est, selon le théorème 4 (Chapitre I, § 3), p. 40, également linéaire dans  $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ ; elle est donc (cf. Chapitre IV, § 4, p. 72) de la forme  $f(y) = \int_0^1 x_0(t) y(t) dt$  où  $y \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$  et  $x_0 \subset (L^{(p)})$ .

Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)y(t)dt = \int_0^1 x_0(t)y(t)dt \quad \text{pour tout } y\subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}),$$

c.-à-d. que  $\{x_n\}$  converge faiblement vers  $x_0$ , c.q.f.d.

Démonstration pour (l) est analogue à celle du théorème établi au § 2, p. 131-133, et consiste à établir la convergence suivant la norme de la suite  $\{x_n\}$  vers un élément  $x_0$ .

Démonstration pour  $(l^{(p)})$  où p > 1 est analogue à celle pour  $(L^{(p)})$ .

### § 5. Un théorème sur la convergence faible d'éléments

Nous allons terminer ce chapitre par le théorème général suivant.

Théorème 3. Etant donnée une opération linéaire y=U(x) définie dans un espace E du type (B) et dont le contredomaine est situé dans un espace  $E_1$ , également du type (B), si une suite  $\{x_n\}$  converge faiblement vers  $x_0$  dans E, la suite  $\{U(x_n)\}$  converge faiblement vers  $U(x_0)$  dans  $E_1$ .

Démonstration. Y étant une fonctionnelle linéaire quelconque définie dans  $E_1$ , la fonctionnelle Y[U(x)] = X(x), définie dans E y est évidemment additive et continue, car on a  $|X(x)| = |Y[U(x)]| \le |Y| \cdot |U(x)| \le |Y| \cdot |U| \cdot |x|$ .

La convergence faible de  $\{x_n\}$  vers  $x_0$  implique donc que

$$\lim_{n\to\infty} Y[U(x_n)] = \lim_{n\to\infty} X(x_n) = X(x_0) = Y[U(x_0)],$$

c.-à-d. que  $\{U(x_n)\}$  converge faiblement vers  $U(x_0)$ , c.q.f.d.

Remarque. Dans l'hypothèse supplémentaire que l'opération y = U(x) est totalement continue, la convergence faible de  $\{x_n\}$  vers  $x_0$  entraı̂ne la convergence de  $\{U(x_n)\}$  vers  $U(x_0)$  selon la norme, c.-à-d. l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}|U(x_n)-U(x_0)|=0.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un  $\varepsilon > 0$  et une suite partielle  $\{x_{n_i}\}$  telle que

(28) 
$$|U(x_n) - U(x_0)| > \varepsilon \quad \text{pour tout } i = 1, 2, ...,$$

la suite  $\{U(x_{n_i})\}$  convergeant en même temps suivant la norme vers un  $y' \subset E_1$ . Or, la convergence faible de  $\{x_{n_i}\}$  vers  $x_0$  entraînant d'autre part, en vertu du théorème 3 qui précède, celle de  $\{U(x_{n_i})\}$  vers  $U(x_0)$ , on aurait  $y' = U(x_0)$ , ce qui est impossible selon (28).

#### CHAPITRE X

## Equations fonctionnelles linéaires

## § 1. Relations entre les opérations linéaires et les opérations conjuguées avec elles (1)

Nous allons nous occuper dans ce chapitre des équations de la forme y = U(x) où U est une opération linéaire ayant pour le domaine des x un espace E du type (B) et pour le contredomaine un espace  $E_1$  situé dans une espace E' également du type (B).

Les fonctionnelles définies dans E seront désignées par X et celles définies dans E' par Y.

Si la transformation de E en  $E_1$  déterminée par l'opération linéaire y=U(x) est biunivoque, l'opération inverse  $x=U^{-1}(y)$  est évidemment additive. Il est facile de voir que pour l'existence de l'opération inverse, il faut et il suffit que

$$U(x) = \Theta$$
 entraı̂ne  $x = \Theta$ .

Si l'opération inverse est continue, il existe un M>0 tel que  $||x|| \le M \cdot ||y||$ .

Réciproquement, s'il existe un nombre m > 0 tel que  $m \cdot ||x|| \le ||U(x)||$ , il existe l'opération inverse continue.

Si l'opération inverse est continue, le contredomaine  $E_1$  est fermé. En effet, en posant  $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ , où  $y_n = U(x_n)$ , on a

$$\lim_{\substack{p\to\infty\\q\to\infty}}\|x_p-x_q\|\leqslant M\cdot\lim_{\substack{p\to\infty\\q\to\infty}}\|y_p-y_q\|=0,$$

d'où, en posant  $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ , on tire U(x) = y.

Chapitre X. Équations fonctionnelles linéaires

139

Si la fonctionnelle  $Y_0$  est une limite transfinie de la suite  $\{Y_{\xi}\}$  du type  $\vartheta$ , la fonctionnelle conjuguée  $X_0 = \bar{U}(Y_0)$  est une limite transfinie de la suite  $\{X_{\xi}\} = \{\bar{U}(Y_{\xi})\}$  du type  $\vartheta$ .

En effet, on a pour tout x les égalités  $X_{\xi}(x) = Y_{\xi}[U(x)]$  où  $1 \le \xi < \vartheta$ .

Lemme. L'opération associée  $X=\bar{U}(Y)$  admettant l'opération inverse continue et  $\Gamma_1$  désignant un ensemble quelconque des Y vectoriel et régulièrement fermé, l'ensemble correspondant  $\Gamma=\bar{U}(\Gamma_1)$  est aussi régulièrement fermé.

Démonstration. Il existe par hypothèse un nombre M>0 tel que l'on a  $\|\bar{U}(Y)\|\geqslant M\cdot\|Y\|$  pour tout Y. Par conséquent, si  $X_\xi\subset \bar{U}(\Gamma_1)$  et  $\|X_\xi\|\leqslant C$  pour tout  $1\leqslant \xi<\vartheta$ , où  $X_\xi=\bar{U}(Y_\xi)$ , on aura aussi  $Y_\xi\subset \Gamma_1$  et  $\|Y_\xi\|\leqslant \frac{1}{M}$  C pour tout  $1\leqslant \xi<\vartheta$ . L'ensemble  $\Gamma_1$  étant par hypothèse régulièrement fermé, il existe en vertu du lemme 3 (Chapitre VIII, § 3), p. 119, une limite transfinie  $Y_0\subset \Gamma_1$  de la suite  $\{Y_\xi\}$ . Evidemment la fonctionnelle  $X_0=\bar{U}(Y_0)$  appartient donc à  $\bar{U}(\Gamma_1)$  et elle est une limite transfinie de la suite  $\{X_\xi\}$ . Ainsi l'ensemble  $\Gamma=\bar{U}(\Gamma_1)$  est transfiniment fermé, donc, en vertu du même lemme, régulièrement fermé, c.q.f.d.

Théorème 1. Si l'opération associée  $X = \overline{U}(Y)$  admet l'opération inverse continue, l'équation y = U(x) admet une solution pour tout y.

Démonstration. Etant donné un  $y_0 \subset E'$ ,  $y_0 \neq \Theta$ , quelconque, désignons par  $\Gamma_1$  l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires Y telles que  $Y(y_0) = 0$  et par  $\Gamma$  celui de toutes les fonctionnelles  $X = \overline{U}(Y)$  où  $Y \subset \Gamma_1$ .

L'ensemble  $\Gamma_1$  est régulièrement fermé; il en résulte en vertu du lemme qui précède que l'ensemble  $\Gamma$  est aussi régulièrement fermé. D'autre part,  $Y_0$  étant une fonctionnelle linéaire telle que  $Y_0(y_0) = 1$ , la fonctionnelle  $X_0 = \bar{U}(Y_0)$  n'appartient pas à  $\Gamma$ . Il existe donc en vertu du théorème 1 (Chapitre VIII, § 3), p. 120, un élément  $x_0 \subset E$  tel que l'on a

(1) 
$$X_0(x_0)=1 \quad \text{ et } \quad X(x_0)=0 \text{ pour tout } X\subset \varGamma.$$
 En posant

(2) 
$$y_1 = U(x_0),$$
  
on a  $Y_0(y_1) = X_0(x_0)$  et  $Y(y_1) = X(x_0),$  d'où en raison de (1)  
(3)  $Y_0(y_1) = 1$  et  $Y(y_1) = 0$  pour tout  $Y \subseteq \Gamma_1$ .

Or, quelle que soit la fonctionnelle linéaire Y, la fonctionnelle  $\overline{Y} = Y - [Y(y_0)] \cdot Y_0$  appartient évidemment à  $\Gamma_1$ , puisque  $\overline{Y}(y_0) = Y(y_0) - [Y(y_0)] \times Y_0(y_0) = 0$ . On a par conséquent, selon (3),  $\overline{Y}(y_1) = Y(y_1) - [Y(y_0)] \times Y_0(y_1) = Y(y_1) - Y(y_0) = 0$ , donc  $Y(y_1 - y_0) = 0$  pour tout Y. Il en résulte

 $(y_1) = Y(y_1) - Y(y_0) = 0$ , tone  $(Y_1 - Y_0) = 0$  point tout 1. If the resulte l'égalité  $y_1 - y_0 = 0$ , donc, d'après (2), la solution  $y_0 = U(x_0)$  pour l'élément  $y_0 \in E'$ , qui a été arbitrairement donné d'avance, c.q.f.d.

Réciproquement, on a le

<sup>(1)</sup> Les théorèmes du § 1 de ce chapitre se trouvent dans la note de S. Banach [23], p. 234-238 [ce volume, p. 181-195].

Théorème 2. Si l'équation  $X=ar{U}(Y)$  admet une solution pour tout X, alors

1º l'opération y = U(x) admet l'opération inverse continue,

 $2^{\circ}$  le contredomaine de U(x) est l'ensemble des y qui satisfont à la condition

(4) 
$$Y(y) = 0, \quad si \quad \bar{U}(Y) = 0.$$

Démonstration. 1°. Si l'opération y = U(x) n'admettait pas d'opération inverse continue, il existerait une suite  $\{x_n\}$  d'éléments de E tels que

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=\infty$$

et  $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 0$  où  $y_n = U(x_n)$ .

Or, l'équation  $X = \overline{U}(Y)$  admettant par hypothèse une solution, quel que soit X, on a  $\lim_{n \to \infty} X(x_n) = \lim_{n \to \infty} Y(y_n) = 0$  pour toute fonctionnelle X définie dans E, ce qui implique en vertu du théorème 6 (Chapitre V, § 1), p. 86, que la suite des normes  $\{\|x_n\|\}$  est bornée, contrairement à (5).

2°. Admettons que pour un élément  $y_0 \subset E'$ 

(6) 
$$\bar{U}(Y) = 0$$
 entraı̂ne  $Y(y_0) = 0$ .

Le contredomaine  $E_1$  de l'opération U(x) étant fermé en vertu de 1° (cf. ce Chapitre, § 1, p. 138), si  $y_0$  n'appartenait pas à  $E_1$ , il existerait (cf. Chapitre IV, § 3, p. 66, lemme) une fonctionnelle  $Y_0$  telle que

$$(7) Y_0(y_0) = 1$$

et  $Y_0(y)=0$  pour tout  $y\subset E_1$ . En posant  $X_0=\bar{U}(Y_0)$ , on aurait donc  $X_0(x)=Y_0(y)=0$  où  $y=U(x)\subset E_1$ , d'où  $\bar{U}(Y_0)=0$ , ce qui entraîne, d'après (6),  $Y_0(y_0)=0$ , contrairement à (7). Par conséquent  $y_0\subset E_1$ .

Réciproquement, si  $\bar{U}(Y) = X = 0$ , on a pour tout  $y \subset E_1$  l'égalité Y(y) = X(x) = 0, c.q.f.d.

En remplaçant dans les théorèmes 1 et 2 qui précèdent x, y, X, Y, U et  $\bar{U}$  respectivement par Y, X, y, x,  $\bar{U}$  et U et en appliquant dans le raisonnement les théorèmes sur les fonctionnelles là où on a fait appel aux théorèmes concernant les éléments, on obtient les deux théorèmes suivants.

Théorème 3. Si l'opération y=U(x) admet l'opération inverse continue, l'équation  $X=\bar{U}(Y)$  admet une solution pour toute fonctionnelle linéaire X définie dans E.

Théorème 4. Si l'équation y = U(x) admet une solution pour tout y, alors  $1^{\circ}$  l'opération  $X = \overline{U}(Y)$  admet l'opération inverse continue,

 $2^{\circ}$  son contredomaine est l'ensemble des X remplissant pour tout  $x \subset E$  la condition:

(8) 
$$X(x) = 0$$
,  $si U(x) = 0$ .

Les théorèmes 1-4 donnent lieu facilement aux théorèmes suivants.

Théorème 5. Si l'équation y=U(x) admet pour tout y exactement une solution, l'équation  $X=\bar{U}(Y)$  en admet aussi exactement une pour tout X et réciproquement.

Théorème 6. Si les opérations y = U(x) et  $X = \overline{U}(Y)$  admettent les opérations inverses continues, il existe pour tout y et pour tout X exactement un x et un Y tels que l'on a y = U(x) et  $X = \overline{U}(Y)$ .

Théorème 7. Si les équations y = U(x) et  $X = \overline{U}(Y)$  admettent une solution pour tout y et pour tout X, elle est unique.

Nous allons démontrer en outre les trois théorèmes qui suivent.

THEORÈME 8. Si le contredomaine d'une opération linéaire U(x) est fermé, celui de l'opération associée  $\overline{U}(Y)$  est l'ensemble des X qui remplissent la condition (8): X(x) = 0, si U(x) = 0.

Démonstration. L'ensemble dérivé  $E_1'$  du contredomaine  $E_1 \subset E'$  de l'opération U(x) constitue (comme ensemble linéaire et fermé) un espace du type (B).

Or, en désignant par Z une fonctionnelle linéaire quelconque définie dans  $E'_1$  et par  $\tilde{U}_1(Z)$  la fonctionnelle linéaire X satisfaisant à l'équation

$$Z[U(x)] = X(x)$$
 pour tout  $x \subset E$ ,

on vérifie aisément que les contredomaines des opérations  $\bar{U}_1(Z)$  et  $\bar{U}(Y)$  sont identiques. En effet, pour toute fonctionnelle Y définie dans E' et assujettie à la condition

(9) 
$$Z(y) = Y(y)$$
 pour tout  $y \subset E'_1$ ,

on a Z[U(x)] = Y[U(x)] pour tout  $x \subset E$ , d'où

$$\bar{U}_1(Z) = \bar{U}(Y)$$

et, par définition de Z, il existe en vertu du théorème 2 (Chapitre IV, § 2), p. 64, une fonctionnelle linéaire Y définie dans E' et satisfaisant à la condition (9), donc à (10). La condition (8) en résulte en vertu du théorème 4,  $2^{\circ}$ , p. 140, en remplaçant E' par  $E_1$ .

Théorème 9. Si le contredomaine de l'opération linéaire  $\bar{U}(Y)$  est fermé, celui de l'opération U(x) est l'ensemble de tous les y qui remplissent la condition (4): Y(y) = 0, si  $\bar{U}(Y) = 0$ .

Démonstration. Les fonctionnelles Z et  $\bar{U}_1(Z)$  étant définies comme dans la démonstration du théorème 8, qui précède, remarquons que  $\bar{U}_1(Z) = \Theta$  entraı̂ne Z(y) = 0 pour tout  $y \subset E_1'$ ; on a donc  $Z = \Theta$ .

Or, les ensembles des Z et des X étant des espaces du type (B), l'opération  $X = \bar{U}_1(Z)$  admet en vertu du théorème 5 (Chapitre III, § 3), p. 53, l'opération inverse continue. Il en résulte en vertu du théorème 1, p. 139.

que l'équation y = U(x) possède une solution pour tout  $y \subset E'_1$ . Le contredomaine  $E_1 = E'_1$  de l'opération y = U(x) est donc fermé.

La condition (4) étant évidemment remplie, lorsque  $y \subset E_1$ , il ne reste donc qu'à établir la réciproque, c.-à-d. démontrer que tout  $y_0 \subset E'$  qui satisfait à (4) appartient à  $E_1$ .

En effet,  $E_1$  étant un ensemble linéaire et fermé, il existerait dans le cas contraire (cf. Chapitre IV, § 3, p. 66, lemme) une fonctionnelle linéaire  $Y_0$  telle que  $Y_0(y_0) = 1$  et  $Y_0(y) = 0$  pour tout  $y \subset E_1$ . En posant donc  $X_0 = \bar{U}(Y_0)$ , on aurait  $X_0(x) = Y_0(y) = 0$  pour  $x \subset E$ , d'où  $X_0 = 0$ , et par conséquent  $\bar{U}(Y_0) = 0$ , contrairement à la condition (4) supposée pour  $y_0$ .

Théorème 10. Si le contredomaine  $E_1$  de l'opération linéaire y = U(x) est fermé, il existe un nombre m > 0 tel qu'à tout  $y \subset E_1$  on peut faire correspondre un  $x \subset E$  satisfaisant aux conditions

$$y = U(x)$$
 et  $|x| \le m \cdot |y|$ .

Démonstration. Nous avons établi au cours de la démonstration du théorème 3 (Chapitre III, § 3), p. 51, la proposition (1), qui, dans les hypothèses du théorème à démontrer, exprime l'existence pour tout  $\varepsilon>0$  d'un  $\eta>0$  tel que, étant donné un y arbitraire assujetti à l'inégalité  $|y|<\eta$ , on peut lui faire correspondre un x satisfaisant aux conditions y=U(x) et  $|x|<\varepsilon$ .

On en déduit facilement l'existence pour tout y d'un x satisfaisant à la thèse du théorème avec  $m = \varepsilon/\eta$ .

### § 2. La théorie de Riesz des équations linéaires totalement continues

Nous allons nous occuper à présent des équations de la forme y = x - U(x), où U est une opération linéaire totalement continue et dont le contredomaine est situé dans le domaine (dans l'espace E des valeurs de x)(1).

Lemme. Si l'opération linéaire U(x) est totalement continue, l'opération T(x) = x - U(x) transforme tout ensemble borné et fermé  $G \subset E$  en ensemble fermé.

Démonstration. Posons

(11) 
$$x_n \subset G \text{ pour } n = 1, 2, \dots, \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} T(x_n) = y_0.$$

La suite  $\{U(x_n)\}$  étant en conséquence un ensemble compact, il existe une suite partielle  $\{U(x_{n_i})\}$  convergente vers un élément  $x_0 \subset E$ . Comme  $x_{n_i} = U(x_{n_i}) + T(x_{n_i})$ , on a selon (11)  $\lim_{i \to \infty} x_{n_i} = x_0 + y_0$ , d'où  $T(y_0 + x_0) = y_0$ .

Théorème 11. Si l'opération linéaire U(x) est totalement continue, les contredomaines des opérations

$$T(x) = x - U(x)$$
 et  $\tilde{T}(X) = X - \tilde{U}(X)$ 

sont fermés.

Démonstration. G désignant l'ensemble des solutions de l'équation T(x) = 0, soit  $y_0 \neq \Theta$  un élément d'accumulation du contredomaine de l'opération T. Il existe par conséquent une suite  $\{x_n\}$  d'éléments de E telle que  $y_0 = \lim_{n \to \infty} T(x_n)$ .

Si la suite  $\{|x_n|\}$  était bornée, l'élément  $y_0$  appartiendrait au contredomaine en vertu du lemme qui vient d'être démontré.

En désignant par  $d_n$  la distance entre  $x_n$  et l'ensemble G, il existe donc un  $w_n \subset G$  tel que

(12) 
$$d_n \leq |x_n - w_n| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) d_n.$$

On a

(13) 
$$\lim_{n\to\infty} T(x_n - w_n) = y_0.$$

Si la suite  $\{|x_n - w_n|\}$  était bornée, la démonstration se trouverait achevée en raison du lemme qui précède.

Supposons donc que  $\lim_{n\to\infty} |x_n-w_n| = \infty$ , d'où, en posant  $z_n = \frac{x_n-w_n}{|x_n-w_n|}$ , on a, selon (13),  $\lim_{n\to\infty} T(z_n) = \Theta$  et  $|z_n| = 1$ . En vertu du lemme on peut donc extraire de la suite  $\{z_n\}$  une suite  $\{z_{n_i}\}$  convergente vers un élément  $w_0$  tel que  $T(w_0) = 0$ , d'où  $w_0 \subset G$ . En posant  $z_n-w_0 = \varepsilon_n$ , il vient

(14) 
$$\lim_{i\to\infty}|\varepsilon_{n_i}|=0,$$

donc  $z_n - w_0 = \frac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|} - w_0 = \varepsilon_n$  et par conséquent  $x_n - w_n - w_0 \cdot |x_n - w_n|$ =  $\varepsilon_n \cdot |x_n - w_n|$ , d'où selon (12)

$$\left|x_{n_i}-w_{n_i}-w_0\cdot|x_{n_i}-w_{n_i}|\right|\leqslant \left|\varepsilon_{n_i}\right|\left(1+\frac{1}{n_i}\right)d_{n_i}.$$

Or, il existe en vertu de (14) et (15) un  $n_i$  tel que l'on a  $|x_{n_i}-w_{n_i}-w_0\cdot|x_{n_i}-w_{n_i}|| \leq d_{n_i}/2$ ; mais c'est impossible, car  $w_{n_i}+w_0\cdot|x_{n_i}-w_{n_i}|$   $\subset G$  et  $d_{n_i}$  est la distance entre  $x_{n_i}$  et G.

<sup>(1)</sup> Les théorèmes de ce §, excepté ceux où intervient la notion d'opération associée, ont été établis pour la première fois par F. Riesz (Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Mathematica 41 (1918), p. 71-98).

Chapitre X. Équations fonctionnelles linéaires

Ainsi le contredomaine de T est fermé. Le raisonnement pour  $\overline{T}(X)$  est analogue.

 $T_{\mbox{\scriptsize H\'eOR\`eME}}$  12. Si l'opération linéaire U(x) est totalement continue, les équations

$$x - U(x) = \Theta$$
 et  $X - \bar{U}(X) = \Theta$ 

admettent tout au plus un nombre fini de solutions linéairement indépendantes.

Démonstration. Supposons par contre qu'il existe une suite infinie  $\{x_n\}$  d'éléments de E linéairement indépendants et satisfaisant aux équations  $x_n - U(x_n) = \Theta$  où n = 1, 2, ... Soit  $E_n$  l'ensemble des éléments de la forme  $\sum_{i=1}^{n} h_i x_i$ , où  $h_i$  sont des nombres réels quelconques. Evidemment

(16) 
$$x \subset E_n$$
 entraı̂ne  $x - U(x) = \Theta$ 

et il est facile de voir que pour tout n = 1, 2, ..., l'ensemble  $E_n$  est linéaire et fermé, ne contenant pas  $x_{n+1}$ , donc un *vrai* sous-ensemble de  $E_{n+1}$ .

En vertu du lemme (Chapitre V, § 3) p. 88, il existe donc une suite  $\{y_n\}$  telle que

(17) 
$$y_n \subset E_n$$
,  $|y_n| = 1$  et  $|y_n - x| > \frac{1}{2}$  pour tout  $x \subset E_{n-1}$ ,

d'où, selon (16),  $y_n - U(y_n) = \Theta$  et par conséquent  $y_n = U(y_n)$ . La suite  $\{y_n\}$  est donc compacte, contrairement à (17).

Pour l'équation  $X - \overline{U}(X) = \Theta$  le raisonnement est analogue, car on peut considérer l'ensemble des X comme un espace du type (B).

Theoreme 13. Si pour une opération linéaire et totalement continue U(x) l'équation y=x-U(x), resp.  $Y=X-\bar{U}(X)$ , admet une solution pour tout y, resp. Y, l'équation  $x-U(x)=\Theta$ , resp.  $X-\bar{U}(X)=\Theta$ , admet exactement une solution, à savoir  $x=\Theta$ , resp.  $X=\Theta$ .

Démonstration. Posons

$$T^{(1)}(x) = x - U(x) = T(x)$$
 et  $T^{(n)}(x) = T[T^{(n-1)}(x)]$ .

Désignons par  $E_n$  l'ensemble de tous les  $x \subset E$  satisfaisant à l'équation  $T^{(n)}(x) = \Theta$  et supposons qu'il existe un  $x_1 \neq \Theta$  tel que  $T(x_1) = \Theta$ . En désignant par  $x_n$  l'élément satisfaisant à l'équation  $x_{n-1} = T(x_n)$ , on a donc

$$T^{(n)}(x_{n+1}) = x_1 \neq \Theta$$
 et  $T^{(n+1)}(x_{n+1}) = T(x_1) = \Theta$ .

d'où

$$x_{n+1} \subset E_{n+1} - E_n.$$

L'ensemble  $E_n$  est évidemment linéarie et fermé; il est un vrai sousensemble de  $E_{n+1}$ . En vertu du lemme, p. 88, il existe donc une suite  $\{y_n\}$  remplissant la condition (17). Or, comme  $y_n \subset E_n$ , on a par définition de T et de  $E_n$  l'égalité  $T(y_n) = y_n - U(y_n)$ , d'où

(18) 
$$U(y_p) - U(y_q) = y_p - [y_q + T(y_p) - T(y_q)] = y_p - x$$

et p > q entraı̂ne  $T^{(p-1)}(x) = T^{(p-1)}(y_q) + T^{(p)}(y_p) - T^{(p)}(y_q) = \Theta$ .

Par conséquent  $x \subset E_{p-1}$ , d'où, en vertu de (17),  $|y_p - x| > \frac{1}{2}$ , donc, d'après (18),  $|U(y_p) - U(y_q)| > \frac{1}{2}$  pour p > q, ce qui est impossible, car la suite  $\{U(y_n)\}$  contient des suites partielles convergentes. On doit donc admettre que  $x_1 = \Theta$ , c.q.f.d.

Pour l'équation  $X - \bar{U}(X) = \Theta$  la démonstration est analogue, car on peut considérer l'ensemble des X comme un espace du type (B).

Théorème 14. Si pour une opération linéaire et totalement continue U(x) l'équation  $x-U(x)=\Theta$ , resp.  $X-\bar{U}(X)=\Theta$ , âdmet comme l'unique solution  $x=\Theta$ , resp.  $X=\Theta$ , l'équation y=x-U(x), resp.  $Y=X-\bar{U}(X)$ , admet une solution pour tout y, resp. pour tout Y.

Démonstration. Le contredomaine de l'opération x-U(x) étant en vertu du théorème 11, p. 143, fermé, on conclut de l'hypothèse en vertu du théorème 3, p. 140, que l'équation  $Y=X-\bar{U}(X)$  admet une solution pour tout Y, d'où, en vertu du théorème 13 qui précède, la seule solution de l'équation  $X-\bar{U}(X)=\Theta$  est donnée par  $X=\Theta$  et par conséquent, en vertu de théorème 5, p. 141, l'équation y=x-U(x) est soluble pour tout y.

La démonstration pour  $Y = X - \overline{U}(X)$  est symétrique.

Théorème 15. Si U(x) est une opération linéaire et totalement continue, les équations

$$x-U(x) = \Theta$$
 et  $X-\bar{U}(X) = \Theta$ 

admettent le même nombre de solutions linéairement indépendantes (1).

Démonstration. Posons comme auparavant

(19) 
$$T(x) = x - U(x) \quad \text{et} \quad \bar{T}(X) = X - \bar{U}(X).$$

Soient

(20) 
$$T(x_i) = \Theta$$
 pour  $i = 1, 2, ..., n$  et  $\bar{T}(X_i) = \Theta$  pour  $i = 1, 2, ..., v$ ,

où les éléments de la suite  $\{x_i\}$ , de même que les fonctionnelles de la suite  $\{X_i\}$ , sont supposés linéairement indépendants et les nombres n et v désignent respectivement les nombres les plus grands possibles de solutions linéairement indépendantes des équations  $T(x) = \Theta$  et  $\overline{T}(X) = \Theta$ .

<sup>(1)</sup> Pour certains cas particuliers ce théorème a été établi par F. Riesz, l. c., Acta Mathematica 41 (1918), p. 96-98. En toute généralité, mais formulé autrement, ce théorème a été établi par M. T. H. Hildebrandt (Über vollstetige lineare Transformationen, Acta Mathematica 51 (1928), p. 311-318) et dans l'énoncé donné ici par M. J. Schauder, Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, Studia Math. 2 (1930), p. 183-196 [Oeuvres, p. 177-189].

Chapitre X. Équations fonctionnelles linéaires

147

Désignons par  $z_i$  où i = 1, 2, ..., v un élément arbitraire tel que l'on ait

(21) 
$$X_{j}(z_{i}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j, \\ 0 & \text{pour } i \neq j. \end{cases}$$

Un tel  $z_i$  existe, car l'ensemble linéaire de la forme

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{j} X_{j} + \sum_{j=i+1}^{\nu} \beta_{j} X_{j}$$

est faiblement fermé et ne contient pas  $X_i$ .

Désignons d'une façon analogue par  $Z_i$  où i=1,2,...,n la fonctionnelle linéaire telle que

(22) 
$$Z_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j, \\ 0 & \text{pour } i \neq j. \end{cases}$$

Une telle fonctionnelle  $Z_i$  existe, car  $x_i$  n'appartient pas à l'ensemble linéaire fermé de la forme

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j x_j + \sum_{j=i+1}^n \beta_j x_j.$$

Ceci dit, supposons d'abord que v > n. Soit

(23) 
$$R(x) = U(x) + \sum_{i=1}^{n} Z_i(x) \cdot z_i$$
 et  $W(x) = x - R(x)$ .

Il est facile de voir que l'opération R(x) ainsi définie est totalement continue. Nous allons montrer que l'équation  $W(x) = \Theta$  admet exactement une solution, à savoir  $x = \Theta$ .

En effet, admettons que  $W(x_0) = \Theta$ . Il s'agit de prouver que  $x_0 = \Theta$ . Or, on a selon (19) et (23):

(24) 
$$W(x_0) = x_0 - R(x_0) = T(x_0) - \sum_{i=1}^n Z_i(x_0) \cdot z_i = 0$$

et comme d'après (20)

(25) 
$$X_i T(x) = \Theta$$
 pour tout  $x$  et  $i = 1, 2, ..., v$ ,

on tire de (21) et (24)

(26) 
$$X_i W(x_0) = Z_i(x_0) = 0$$
 pour  $i = 1, 2, ..., n$ 

d'où  $T(x_0) = \Theta$ , ce qui implique selon (20) et par définition de n que  $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$  où  $\alpha_i$  sont des nombres réels correspondants. En vertu de (26) et (22) on a donc  $Z_i(x_0) = \alpha_i = 0$  pour tout i = 1, 2, ..., n, d'où finalement  $x_0 = \Theta$ .

Ceci établi, on en conclut en vertu du théorème 14, p. 145, que l'équation  $x-R(x)=T(x)-\sum_{i=1}^n Z_i(x)\cdot z_i=z_{n+1}$  admet une solution. Mais on voit aussitôt en vertu de (21) et (25) que  $X_{n+1}[x-R(x)]=0$  et d'autre part, en vertu de (21), que  $X_{n+1}(z_{n+1})=1$ . La supposition que  $\nu>n$  est donc impossible.

Supposons à présent que v < n. Soit  $\overline{R}(x) = \sum_{i=1}^{v} Z_i(x) \cdot z_i$ , d'où  $\overline{R}(X) = \sum_{i=1}^{v} X(z_i) \cdot Z_i$ . En procédant comme plus haut, on montrerait alors que l'équation  $\overline{T}(x) - \sum_{i=1}^{v} X(z_i) \cdot Z_i = \Theta$  (conjuguée de l'équation  $T(x) - \sum_{i=1}^{v} Z_i(x) \times z_i = \Theta$ ) admet exactement une solution, à savoir  $X = \Theta$ . L'équation  $\overline{T}(X) - \sum_{i=1}^{v} X(z_i) \cdot Z_i = Z_{v+1}$  devrait donc, en vertu du théorème 14, p. 145, admettre une solution, ce qui est cependant impossible, car on a  $\overline{T}(X)x_{v+1} = X[T(x_{v+1})] = 0$  pour tout X, d'où, selon (22),  $Z_i(x_{v+1}) = 0$  pour i = 1, 2, ..., n et d'autre part  $Z_{v+1}(x_{v+1}) = 1$ . Ainsi la supposition que v < n implique également une contradiction.

## § 3. Valeurs régulières et valeurs propres dans les équations linéaires

Admettons à présent de l'opération U(x) qu'elle est tout simplement linéaire, mais maintenons l'hypothèse que son contredomaine est situé dans le domaine E.

L'opération x-hU(x) est alors linéaire pour tout h réel et son opération associée est de la forme  $X-h\bar{U}(X)$  où  $\bar{U}$  désigne l'opération associée à U. Ceci dit, nous allons étudier les équations associées

(27) 
$$x - hU(x) = y \quad \text{et} \quad X - h\bar{U}(X) = Y.$$

Si, pour un  $h_0$  donné, la première, resp. la deuxième des équations (27) admet pour tout y, resp. pour tout Y, exactement une solution,  $h_0$  s'appelle valeur régulière de cette équation; dans le cas contraire  $h_0$  s'appelle sa valeur propre. L'ensemble des valeurs propres constitue l'ainsi dit spectre.

Si x, resp. X, satisfait à la première, resp. à la seconde, des équations

(28) 
$$x + hU(x) = \Theta$$
 et  $X + h\bar{U}(X) = \Theta$ ,

il porte le nom d'élément propre, resp. de fonctionnelle propre.

En vertu du théorème 5, p. 141, les deux équations (27) ont le même ensemble des valeurs régulières, donc aussi des valeurs propres.

On énoncera sans peine les théorèmes 1-9, établis p. 139-141, pour les équations de la forme (27). Ces théorèmes permettent de conclure sur la manière dont se comporte l'une des deux équations d'après celle dont se comporte l'autre et réciproquement.

THÉORÈME 16. L'ensemble des valeurs régulières est ouvert.

Démonstration.  $h_0$  étant une valeur régulière, il existe un nombre m > 0 remplissant les conditions

$$|x-h_0 U(x)| \geqslant m \cdot |x|$$
 et  $|X-h_0 \overline{U}(X)| \geqslant m \cdot |X|$ .

On a par conséquent pour tout  $\varepsilon$ :

$$|x-(h_0+\varepsilon)U(x)| \ge |x-h_0U(x)|-|\varepsilon|\cdot |U(x)| \ge (m-|\varepsilon|\cdot |U|)\cdot |x|$$

et d'une façon analogue

$$|X-(h_0+\varepsilon)\bar{U}(X)| \geqslant (m-|\varepsilon|\cdot|\bar{U}|)\cdot|X|.$$

Il en résulte que pour des |E| assez petits les opérations

$$x-(h_0+\varepsilon)\cdot U(x)$$
 et  $X-(h_0+\varepsilon)\cdot \bar{U}(X)$ 

ont les opérations inverses continues, ce qui a pour conséquence, en vertu du théorème 6, p. 141, que  $h_0 + \varepsilon$  est également une valeur régulière.

Théorème 17. Si |h| < 1/|U|, h est une valeur régulière (1).

Démonstration. Si |h| < 1/|U|, les solutions peuvent être représentées sous la forme

(29) 
$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} h^n U^{(n)}(y) \quad \text{et} \quad X = Y + \sum_{n=1}^{\infty} h^n \bar{U}^{(n)}(Y),$$

οù

$$U^{(1)}(y) = U(y)$$
 et  $\bar{U}^{(1)}(Y) = \bar{U}(Y)$ ,  $U^{(n)}(y) = U[U^{(n-1)}(y)]$  et  $\bar{U}^{(n)}(Y) = \bar{U}[\bar{U}^{(n-1)}(Y)]$ .

Les séries (29) sont convergentes, car on a

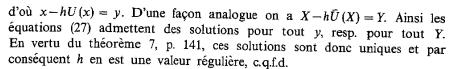
$$\sum_{n=1}^{\infty} |h^n U^{(n)}(y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [|h| \cdot |U|]^n |y|$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h^n \, \bar{U}^{(n)}(Y)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left[ |h| \cdot |\bar{U}| \right]^n |Y|.$$

Or, on obtient de (29):

$$U(x) = U(y) + \sum_{n=1}^{\infty} h^n U^{(n+1)}(y) = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} h^n U^{(n)}(y) = \frac{1}{h} (x-y),$$



Théorème 18. Si l'on a pour  $h \neq h'$ 

$$x-hU(x) = \Theta$$
 et  $X-h'\bar{U}(X) = \Theta$ .

alors X(x) = 0.

En d'autres termes: l'élément propre de la valeur h est orthogonal à toute fonctionnelle propre de la valeur h' distancte de h.

Démonstration. On a  $X(x) = hX[U(x)] = h\overline{U}(X)x$  et comme  $\overline{U}(X) = \frac{1}{h'}X$ , il vient  $X(x) = \frac{h}{h'}X(x)$ . Si  $h \neq h'$ , on a donc X(x) = 0.

## § 4. Théorèmes de Fredholm dans la théorie des équations linéaires totalement continues

Si, dans les hypothèses du  $\S$  précédent, l'opération U(x) est en outre supposée totalement continue, on peut énoncer pour les équations (28) les théorèmes suivants, qui constituent une généralisation des théorèmes de Fredholm sur les équations intégrales (1).

Théorème 19. Les équations (28) ont le même nombre fini d(h) de solutions indépendantes.

Ce n'est qu'un autre énoncé du théorème 15, p. 145.

Théorème 20. Si d(h) = 0, h est une valeur régulière.

C'est une conséquence des théorèmes 14, p. 145, et 19, qui précède.

Théorème 21. Si d(h) > 0 et si

$$\{x_i\}$$
, resp.  $\{X_i\}$ , où  $i = 1, 2, ..., d(h)$ ,

désignent les solutions des équations (28), les équations (27) admettent des solutions pour tout y tel que  $X_i(y) = 0$ , resp. pour tout Y tel que  $Y(x_i) = 0$ .

C'est une conséquence des théorèmes 8, resp. 9, p. 141, et 11, p. 143.

Nous allons démontrer le

Théorème 22. Si l'opération linéaire U(x) est totalement continue, les valeurs propres de la première équation (27)

$$y = x - hU(x)$$

constituent un ensemble isolé (2).

<sup>(1)</sup> Cf. S. Banach [7], p. 161 [ce volume, p. 310], théorème 7.

<sup>(1)</sup> Cf. J. Schauder, l. c., Studia Mathematica 2 (1930), p. 183-196 [Oeuvres, p. 177-189].

<sup>(2)</sup> Cf. F. Riesz, l. c., Acta Mathematica 41 (1918), p. 90, Satz 12.

Démonstration. Soit  $\{h_n\}$  une suite infinie de valeurs propres où  $h_i \neq h_j$  pour  $i \neq j$ . Posons

(30) 
$$x_n = h_n U(x_n) \quad \text{et} \quad x_n \neq \Theta.$$

Montrons d'abord par recurrence que les éléments  $x_n$  sont linéairement indépendants.

En effet, si  $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$  l'étaient, mais  $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$ , on aurait  $x_n = h_n U(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} h_n \alpha_i U(x_i)$ , d'où  $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} h_n \frac{\alpha_i}{h_i} x_i$  et par conséquent  $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(1 - \frac{h_n}{h_i}\right) x_i = 0$ . Comme par hypothèse  $h_n/h_i \neq 1$  pour n > i, on voit que déjà les éléments  $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$  ne seraient pas linéairement indépendants.

Ceci établi, soit pour tout  $n=1,2,...,E_n$  l'ensemble linéaire des éléments y de la forme  $y=\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ ; il est donc fermé et constitue un vrai sous-ensemble de  $E_{n+1}$ . On a pour tout  $y \subset E_n$  selon (30)

$$y - h_n U(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^n h_n \alpha_i \frac{x_i}{h_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(1 - \frac{h_n}{h_i}\right) x_i,$$

d'où  $y-h_n U(y) \subset E_{n-1}$ . En vertu du lemme, p. 88, il existe donc une suite d'éléments  $\{y_n\}$  remplissant les conditions (17), p. 144.

Or, supposons, que la suite  $\{h_n\}$  soit convergente. L'opération U étant totalement continue, la suite  $\{U(h_n y_n)\}$  formerait donc un ensemble compact. D'autre part, on a pour p > q

$$|U(h_{p}y_{p}) - U(h_{q}y_{q})| = |y_{p} - [y_{p} - h_{p}U(y_{p}) + U(h_{q}y_{q})]|$$

et, selon (17),  $y_p \subset E_p$ , ce qui implique, comme nous avons vu, que  $y_p - h_p U(y_p) \subset E_{p-1}$ ; de même  $h_q U(y_q) \subset E_q \subset E_{p-1}$ , d'où, en vertu de (17) et (31),  $|U(h_p y_p) - U(h_q y_q)| > \frac{1}{2}$  pour tout p > q, de sorte que la suite  $\{U(h_n y_n)\}$  ne formerait pas un ensemble compact.

En raison de cette contradiction, on ne peut pas admettre qu'une suite  $\{h_n\}$  de valeurs propres en question soit convergente. Elles forment donc un ensemble isolé, c.q.f.d.

### § 5. Equations intégrales de Fredholm

Envisageons maintenant quelques applications des théorèmes qui viennent d'être établis.

Dans les espaces  $(L^{(p)})$ , aux équations de la forme x-hU(x)=y se

réduisent les ainsi dites équations intégrales de Fredholm, dont la forme générale est la suivante

(32) 
$$x(s) - h \int_{0}^{1} K(s, t) x(t) dt = y(s),$$

où K(s, t) remplit certaines conditions.

L'équation associée  $X - h\bar{U}(X) = Y$  prend l'aspect

(33) 
$$X(t) - h \int_{0}^{1} K(s, t) X(s) ds = Y(t).$$

On donnera facilement l'interprétation des théorèmes qui précèdent dans le cas de ces équations intégrales.

Si K(s,t) satisfait aux conditions convenables, l'opération linéaire  $\int_0^1 K(s,t)x(t)dt$  est totalement continue et en conséquence les théorèmes des §§ 2, 3 et 4 de ce chapitre s'appliqueront aux équations (32) et (33). En particulier, les théorèmes 19–21 prennent alors la forme des théorèmes dits de Fredholm (mais, bien entendu, ils subsistent aussi en dehors des équations intégrales).

## § 6. Equations intégrales de Volterra

Les équations de la forme

(34) 
$$x(s) - \int_{0}^{s} K(s, t) x(t) dt = y(s),$$

où K(s,t) est une fonction continue, portent le nom d'équations de Volterra. L'opération  $\int\limits_0^s K(s,t)x(t)dt$  est alors totalement continue dans les espaces (C) et  $(L^{(p)})$  où p>1.

Nous allons montrer que l'équation

(35) 
$$x(s) - \int_{0}^{s} K(s, t) x(t) dt = 0$$

admet la solution unique x(s) = 0.

En effet, admettons que x(s) remplisse cette équation; évidemment x(s) est une fonction continue. Posons

$$m = \max_{0 \le s \le 1} |x(s)|$$
 et  $M = \max_{\substack{0 \le s \le 1 \ 0 \le t \le 1}} |K(s, t)|$ .

On a donc selon (35)

$$|x(s)| \leq M \cdot \int_{0}^{s} |x(t)| dt,$$

Chapitre X. Équations fonctionnelles linéaires

d'où  $|x(s)| \le M \cdot m \cdot s$  pour  $0 \le s \le 1$ , ce qui donne, en remplaçant dans (36) x(t) par  $M \cdot m \cdot s$ , l'inégalité  $|x(s)| \le M^2 \cdot m \cdot s^2/2$ . En procédant ainsi de suite, on obtient donc  $|x(s)| \le \frac{(M \cdot s)^n}{n!} \cdot m$  pour tout n = 1, 2, ..., d'où, évidemment, x(s) = 0.

Ceci établi, revenons sur l'équation (34). Comme pour  $x \subset (C)$  et  $y \subset (C)$ , de même que pour  $x \subset (L^{(p)})$  et  $y \subset (L^{(p)})$ , l'opération  $\int_0^s K(s,t)x(t)dt$  est totalement continue, l'équation (34) possède d'après le théorème 14, p. 145, pour tout  $y \subset (C)$ , resp.  $y \subset (L^{(p)})$ , exactement une solution  $x \subset (C)$ , resp.  $x \subset (L^{(p)})$ .

#### § 7. Equations intégrales symétriques

Si l'opération y=U(x) est linéaire pour x et y de  $(L^{(2)})$ , l'opération associée  $X=\bar{U}(Y)$  peut être regardée comme linéaire pour X et Y de  $(L^{(2)})$ . En effet, toute fonctionnelle linéaire dans  $(L^{(2)})$  étant (cf. Chapitre IV, § 4, p. 72) de la forme  $\int\limits_0^1 Y(t)x(t)dt$  où  $Y(t)\subset (L^{(2)})$ , nous pouvons considérer Y(t) comme représentant cette fonctionnelle.

L'opération U(x) s'appelle symétrique, lorsque

(37) 
$$\int_{0}^{1} yU(x)dt = \int_{0}^{1} xU(y)dt \quad \text{pour} \quad x \subset (L^{(2)}) \text{ et } y \subset (L^{(2)}).$$

Comme  $\int_{0}^{1} yU(x)dt = \int_{0}^{1} x\bar{U}(y)dt$ , toute opération symétrique coı̈ncide avec son opération associée.

Lorsque la fonction K(s, t) est symétrique (c.-à-d. que l'on a partout K(s, t) = K(t, s)) et en outre l'intégrale double

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} K(s,t) x(t) y(s) ds dt$$

existe pour tous  $x \subset (L^{(2)})$  et  $y \subset (L^{(2)})$ , les opérations

$$U(x) = \int_0^1 K(s,t)x(t)dt = y(s),$$

(38)

$$V(x) = x(s) - h \int_{0}^{1} K(s, t) x(t) dt = y(s),$$

sont des opérations linéaires et symétriques, car elles remplissent la condition (37).

Les équations de la forme (38) portent le nom d'équations intégrales symétriques.

Théorème 23. Si l'opération U(x) est symétrique, la valeur du paramètre h de l'opération de la forme x-hU(x)=y est régulière, lorsque cette opération admet l'opération inverse continue ou bien lorsque cette équation est soluble pour tout y.

La démonstration résulte des théorèmes 3 et 4, p. 140, à la suite du fait que l'équation en question est dans ces conditions identique à l'équation associée.



#### CHAPITRE XI

## Isométrie, équivalence, isomorphie

#### § 1. Isométrie

Soient E et  $E_1$  des espaces métriques (v. Introduction, § 7, p. 29) et y = U(x), où  $x \subset E$  et  $y \subset E_1$ , une opération biunivoque transformant E en  $E_1$  tout entier. On dit que cette transformation est *isométrique*, lorsqu'elle n'altère pas la distance, c.-à-d. lorsqu'on a

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$$
 où  $y_1 = U(x_1)$  et  $y_2 = U(x_2)$ 

pour tout couple  $x_1, x_2$  d'éléments de E.

Si E et  $E_1$  sont des espaces vectoriels et normés, nous disons que la transformation de E en  $E_1$  donnée par l'opération y = U(x) est linéaire, lorsque l'opération U(x) est linéaire.

Les espaces vectoriels normés étant des espaces métriques (cf. Chapitre IV, § 1, p. 63), on peut considérer aussi les transformations isométriques de ces espaces l'un en l'autre.

## § 2. Les espaces $(L^2)$ et $(l^2)$

Théorème 1. Les espaces (L2) et (l2) sont isométriques.

Démonstration. Soit, en effet,  $\{x_i(t)\}$  où  $0 \le t \le 1$  une suite quelconque orthogonale, normée et complète. Si  $x \subset (L^2)$ , on a, comme on sait,

(1) 
$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \int_{0}^{1} x_{i}(t) x(t) dt \right]^{2} = \int_{0}^{1} x^{2}(t) dt.$$

En désignant donc par U(x) la suite  $y = \{\eta_i\}$  où  $\eta_i = \int_0^1 x_i(t)x(t)dt$ , on a en vertu de (1)  $y \subset (l^2)$  et |U(x)| = |x|. Comme additive et n'altérant pas la norme, l'opération y = U(x) est linéaire. Or, on sait de la théorie des séries orthogonales qu'il existe pour tout  $y \subset (l^2)$  une et une seule fonction  $x(t) \subset (L^2)$  telle que y = U(x).

Ainsi l'opération linéaire y = U(x) transforme  $(L^2)$  en  $(l^2)$  d'une façon biunivoque et sans altérer la norme, donc la distance. Les espaces  $(L^2)$  et  $(l^2)$  sont par conséquent isométriques.

Remarque. Nous verrons dans la suite que les espaces  $(L^{(p)})$  et  $(l^{(q)})$  ne sont isométriques que dans le cas où p=q=2. C'est une conséquence du corollaire (Chapitre XII, §3), p. 186.

## § 3. Transformations isométriques des espaces vectoriels normés

Théorème 2. Toute transformation isométrique U(x) d'un espace vectoriel normé en un autre, telle que  $U(\Theta) = \Theta$ , est linéaire (1).

Démonstration. Soit d'abord E un espace (D) arbitraire et  $x_1, x_2$  un couple quelconque de points de E.

Désignons par  $H_1$  l'ensemble des points  $x \subset E$  tels que

(2) 
$$(x, x_1) = (x, x_2) = \frac{1}{2}(x_1, x_2)$$

et, pour n=2,3,..., par  $H_n$  l'ensemble des points  $x\subset H_{n-1}$  assujettis pour tout  $z\subset H_{n-1}$  à l'inégalité

$$(3) (x,z) \leqslant \frac{1}{2}\delta(H_{n-1}),$$

où  $\delta(H_{n-1})$  désigne le diamètre de l'ensemble  $H_{n-1}$ , c.-à-d. la borne supérieure des distances de ses points.

La suite  $\{H_n\}$  étant ainsi définie, on a

$$\lim_{n\to\infty}\delta(H_n)=0.$$

En effet, si les ensembles  $H_n$  ne sont pas vides, on a pour tout couple x', x'' de points de  $H_n$ :  $x'' \subset H_{n-1}$  (puisque par définition  $H_1 \supset H_2 \supset ... \supset H_n \supset ...$ ), donc, en vertu de (3),  $(x', x'') \le \frac{1}{2} \delta(H_{n-1})$ , par conséquent  $\delta(H_n) \le \frac{1}{2} \delta(H_{n-1})$ , d'où  $\delta(H_n) \le 1/2^{n-1} \delta(H_1)$ , et d'autre part, on a en vertu de (2), pour tout couple x', x'' de points de  $H_1$  l'inégalité  $(x', x'') \le (x', x_1) + (x'', x_1) = (x_1, x_2)$ , donc  $\delta(H_1) \le (x_1, x_2)$  et par conséquent  $\delta(H_n) \le 1/2^{n-1} (x_1, x_2)$ , d'où l'égalité (4).

Il en résulte que la partie commune des ensembles  $H_n$  (lorsqu'elle n'est pas vide) se réduit à un point. Nous appellerons ce point le centre du couple  $x_1, x_2$ .

Ceci dit, soit E un espace vectoriel normé. Pour tous deux points x' et x'' de E on a donc

$$(x', x'') = |x' - x''|.$$

<sup>(1)</sup> Ce théorème a été établi par MM. S. Mazur et S. Ulam (voir Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 194, Paris 1932, p. 946-948).

Posons  $\bar{x} = x_1 + x_2 - x$  pour  $x \subset E$ . On voit aisément par induction que

(5) 
$$x \subset H_n$$
 entraı̂ne  $\bar{x} \subset H_n$  pour tout  $n = 1, 2, ...$ 

En effet, si  $x \in H_1$  on a  $|\bar{x}-x_1|=|x-x_2|$  et  $|\bar{x}-x_2|=|x-x_1|$ , donc  $|\bar{x}-x_1|=|\bar{x}-x_2|$  =  $\frac{1}{2}|x_1-x_2|$ , d'où selon (2)  $\bar{x} \in H_1$  et, en admettant que la relation (5) est vraie pour n-1, on a en conséquence pour  $x' \in H_{n-1}$ ,  $x_1+x_2-x' \in H_{n-1}$ . Si  $x \in H_n$ , on a donc selon (3)  $|\bar{x}-x'|=|(x_1+x_2-x')-x| \leq \frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$ , d'où  $\bar{x} \in H_n$ .

Nous allons montrer que le point  $\xi = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  est le centre du couple  $x_1, x_2$ . On a, en effet,  $\xi \subset H_1$ , car  $|x_1 - \xi| = |x_2 - \xi| = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$ . Admettons donc que  $\xi \subset H_{n-1}$ . Pour tout  $x \subset H_{n-1}$  on a en vertu de (5)  $x_1 + x_2 - x = \overline{x} \subset H_{n-1}$  et comme  $2|\xi - x| = |x_1 + x_2 - 2x| = |x - \overline{x}| \le \delta(H_{n-1})$ , on conclut que  $|\xi - x| \le \frac{1}{2}\delta(H_{n-1})$ , d'où  $\xi \subset H_n$ . Comme appartenant à  $H_n$  pour tout n naturel, le point  $\xi$  est donc le centre de  $x_1, x_2$ .

Ceci établi, soit  $E_1$  également un espace vectoriel normé et y = U(x), où  $x \subset E$  et  $y \subset E_1$ , une opération isométrique transformant E en  $E_1$  tout entier de façon que  $U(\Theta) = \Theta$ . La notion de centre étant définie d'une façon métrique, on aperçoit facilement que le centre du couple quelconque  $x_1, x_2$  de points de E se trouvera transformé en centre du couple  $U(x_1), U(x_2)$  de  $E_1$ . On a donc

$$U\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right] = \frac{1}{2}\left[U(x_1)+U(x_2)\right] \quad \text{pour} \quad x_1 \subset E \text{ et } x_2 \subset E,$$

d'où, en posant  $x_1 = x$  et  $x_2 = \Theta$ , on obtient par suite de l'hypothèse que  $U(\Theta) = \Theta$ :

$$U\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}U(x)$$
 pour tout  $x \subset E$ .

Il en résulte pour des points arbitraires  $x_1$  et  $x_2$  de E que:

$$U(x_1+x_2)=U\left[\frac{1}{2}(2x_1+2x_2)\right]=\frac{1}{2}U(2x_1)+\frac{1}{2}U(2x_2)=U(x_1)+U(x_2).$$

Ainsi l'opération U(x) est additive et, par suite de sa continuité, linéaire. Il en est donc de même de la transformation y = U(x), c.q.f.d.

## § 4. Espace des fonctions réelles continues

Etant donné un ensemble quelconque Q métrique, complet et compact (cf. Introduction, § 7, p. 29), on peut considérer l'ensemble E des fonctions réelles continues x(q) définies pour  $q \subset Q$  comme un espace du type (B), si l'on définit dans E de la façon usuelle l'addition et la multiplication par nombres et choisit comme norme le maximum du module de la fonction.

LEMME. Soit  $x(q) \subseteq E$  où  $q \subseteq Q$ . Pour qu'on ait pour un élément donné  $q_0 \subseteq Q$  l'inégalité

(6) 
$$|x(q_0)| > |x(q)| \quad \text{pour tout } q \neq q_0,$$

il faut et il suffit que

(7) 
$$\lim_{h \to 0} \frac{\|x + hz\| - \|x\|}{h}$$

existe pour tout  $z(q) \subset E$ .

En outre, si la fonction x(q) satisfait à l'inégalité (6), on a

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}=z(q_0)\cdot\operatorname{sign} x(q_0)\quad pour\ tout\ z(q)\subset E.$$

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, on a ||x|| =  $|x(q_0)|$  et comme la fonction continue |x+hz| atteint son maximum, on obtient

$$(8) |x(q_0) + hz(q_0)| - |x(q_0)| \le ||x + hz|| - ||x|| = |x(q_h) + hz(q_h)| - |x(q_0)|,$$

où  $q_h$  est un point dépendant de h et appartenant à Q. Or, on tire de (8)  $|x(q_0)+hz(q_0)| \leq |x(q_h)+hz(q_h)|$  et par conséquent  $0 \leq |x(q_0)|-|x(q_h)| \leq |h|\cdot|z(q_0)|+|h|\cdot|z(q_h)| \leq 2|h|\cdot||z||$ , d'où  $\lim_{h\to 0}|x(q_h)|=|x(q_0)|$ . Il en résulte par suite de la compacticité de Q que

$$\lim_{h \to 0} q_h = q_0.$$

Ceci établi, examinons d'abord le cas où  $x(q_0) > 0$ . Il existe alors un  $\varepsilon > 0$  tel que l'on ait pour  $|h| < \varepsilon$  l'égalité

$$|x(q_0)+hz(q_0)|-|x(q_0)| = x(q_0)+hz(q_0)-x(q_0) = hz(q_0)$$

et, en vertu de (9),

$$|x(q_h) + hz(q_h)| - |x(q_0)| = x(q_h) + hz(q_h) - x(q_0) \le hz(q_h),$$

d'où, selon (8),  $hz(q_0) \le ||x+hz|| - ||x|| \le hz(q_h)$  et par conséquent, encore en raison de (9) et par suite de la continuité de z(q),

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}=z(q_0).$$

Dans le cas où  $x(q_0) < 0$  on obtiendrait, en procédant d'une façon analogue,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h} = -z(q_0).$$

Chapitre XI. Isométrie, équivalence, isomorphie

159

Nous avons ainsi démontré la nécessité de la condition (l'existence de la limite (7)) et, en même temps, la deuxième partie du lemme.

Pour montrer que la condition est suffisante, supposons que le module de la fonction x(q) atteigne son maximum dans deux points distincts  $q_0$  et  $q_1$  de Q, c.-à-d. que

$$|x(q_0)| = |x(q_1)| \ge |x(q)|$$
 pour tout  $q \subset Q$ .

Dans le cas où  $x(q_0) > 0$  posons  $z(q) = (q, q_1)$ . Il vient:  $||x + hz|| - ||x|| \ge x(q_0) + h(q_0, q_1) - x(q_0)$ , d'où

(10) 
$$\lim_{h \to +0} \inf \frac{\|x+hz\| - \|x\|}{h} \ge (q_0, q_1) > 0.$$

On a en même temps  $||x+hz|| - ||x|| \ge |x(q_1) + h(q_1, q_1)| - |x(q_1)| = 0$ , d'où

(11) 
$$\limsup_{h \to -0} \frac{\|x + hz\| - \|x\|}{h} \leq 0,$$

et les inégalités (10) et (11) montrent l'impossibilité de l'existence de la limite (7).

Dans le cas où  $x(q_0) < 0$  on parviendrait, en posant  $z = -(q, q_1)$ , à la même conclusion, c.q.f.d.

On appelle deux ensembles homéomorphes, lorsqu'il existe une transformation biunivoque et bicontinue de l'un en l'autre.

Théorème 3. Pour que deux ensembles métriques, complets et compacts Q et  $Q_1$  soient homéomorphes, il faut et il suffit que les espaces E et  $E_1$  des fonctions réelles continues définies dans ces ensembles soient isométriques.

Démonstration. Necessité. On vérifie facilement que, q' = f(q), où  $q \subset Q$  et  $q' \subset Q_1$ , désignant une transformation biunivoque et bicontinue de Q en  $Q_1$  tout entier, la transformation de  $E_1$  en E qui fait correspondre à toute fonction  $y(q') \subset E_1$  la fonction  $x(q) = y[f(q)] \subset E$  est isométrique.

Suffisance. Les espaces E et  $E_1$  étant supposés isométriques, soit y = V(x) l'opération biunivoque qui transforme E en  $E_1$  tout entier, en faisant correspondre à toute fonction  $x(q) \subset E$  la fonction  $y(q') \subset E_1$  de façon que  $\|V(x_1) - V(x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$  pour tous  $x_1$  et  $x_2$  de E.

En posant  $U(x) = V(x) - V(\theta)$ , on aperçoit aisément que l'opération U(x) jouit exactement des mêmes propriétés et qu'on a en outre  $U(\theta) = \theta$ . En vertu du théorème 2, p. 155, l'opération y = U(x) est donc linéaire.

Soit  $q_0$  un point donné de Q et  $x(q) \subset E$  où  $q \subset Q$  une fonction satisfaisant à l'inégalité (6) du lemme, p. 157. Comme l'opération y = U(x) n'altère pas la norme, on a pour tout nombre h, en posant U(z) = t où  $z \subset E$ :

$$\frac{\|x+hz\|-\|x\|}{h}=\frac{\|y+ht\|-\|y\|}{h},$$

d'où, en vertu du lemme précédent,

(12) 
$$z(q_0) \cdot \operatorname{sign} x(q_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\|y + ht\| - \|y\|}{h}.$$

Or, comme l'opération U(z) transforme E en  $E_1$  tout entier, la limite (12) existe pour tout  $t \subset E_1$ . Il existe par conséquent, en vertu du lemme, un  $q'_0 \subset Q_1$  tel que  $|y(q'_0)| > |y(q')|$  pour tout point  $q' \neq q'_0$  de  $Q_1$  et que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|y+ht\|-\|y\|}{h}=t(q_0')\cdot\operatorname{sign} y(q_0')\quad \text{ pour tout } t\subset E_1.$$

On en conclut en vertu de (12) que  $z(q_0) \cdot \operatorname{sign} x(q_0) = t(q'_0) \times \operatorname{sign} y(q'_0)$ , d'où, en posant  $\varepsilon(q'_0) = \operatorname{sign} x(q_0) \cdot \operatorname{sign} y(q'_0)$ , on obtient la relation suivante entre  $q_0 \subset Q$  et  $q'_0 \subset Q_1$ :

(13) 
$$t(q_0') = z(q_0) \cdot \varepsilon(q_0') \quad \text{où} \quad |\varepsilon(q_0')| = 1$$

et qui subsiste pour tout  $z \subset E$  et t = U(z).

Envisageons donc la fonction

$$q_0' = f(q_0),$$

qui transforme Q en  $Q_1$ .

Cette transformation est biunivoque. En effet, l'égalité  $q_1'=q_2'$  où  $q_1'=f(q_1)$  et  $q_2'=f(q_2)$  donne en vertu de (13)  $|z(q_1)|=|z(q_2)|$  pour toute fonction  $z\subset E$ , ce qui entraı̂ne l'égalité  $q_1=q_2$ , puisqu'elle se présente en particulier pour la fonction  $z(q)=(q,q_1)$ .

La fonction f transforme en outre Q en  $Q_1$  tout entier. En effet, quel que soit  $\bar{q}' \subset Q_1$ , on a d'après (13), en posant  $t(q') = \frac{1}{1 + (q', \bar{q}')}$ ,

(14) 
$$|z(q_0)| = \frac{1}{1 + (q'_0, \bar{q}')}$$
 pour tout  $q_0 \subset Q$ .

Or, comme ||z|| = ||t|| = 1, il existe un  $q_0 \subset Q$  tel que  $|z(q_0)| = 1$ . Pour le point  $q_0' = f(q_0)$  on a donc, selon (14),  $\frac{1}{1 + (q_0', \overline{q}')} = 1$ , d'où  $(q_0', \overline{q}') = 0$  et par conséquent  $\overline{q}' = q_0'$ .

Enfin, la transformation f est continue. En effet, soit  $q_0 = \lim_{n \to \infty} q_n$  et  $q'_n = f(q_n)$  pour n = 1, 2, ... Il vient, selon (13),  $\lim_{n \to \infty} |t(q'_n)| = |t(q'_0)|$  pour tout  $t \subset E_1$ , d'où en particulier pour  $t(q') = (q'_0, q'_0)$  on a  $\lim_{n \to \infty} (q'_n, q'_0) = (q'_0, q'_0) = 0$  et par conséquent  $\lim_{n \to \infty} q'_n = q'_0$ .

Il en résulte par suite de la compacticité de Q et  $Q_1$  que ces ensembles sont homéomorphes, c.q.f.d.

Remarque. On voit de cette démonstration que si l'opération y = U(x)

Chapitre XI. Isométrie, équivalence, isomorphie

transforme l'espace E en espace  $E_1$  d'une façon isométrique et si  $U(\Theta) = \Theta$ , il existe une fonction q' = f(q) transformant l'ensemble Q en  $Q_1$  par homéomorphie et une fonction continue  $\varepsilon(q')$  telle que

$$y(q') = x[f^{-1}(q')] \cdot \varepsilon(q')$$
 où  $y = U(x)$  et  $|\varepsilon(q')| = 1$ .

Applications. Le théorème 3 qui précède implique en particulier que l'espace (C) des fonctions continues x(t) définies pour  $0 \le t \le 1$  n'est pas isométrique avec celui des fonctions continues x(u, v) de deux variables u et v, définies dans le carré  $0 \le u \le 1$ ,  $0 \le v \le 1$ .

Cependant l'espace  $(L^{(p)})$  des fonctions à p-ième puissance sommable définies dans l'intervalle  $0 \le t \le 1$  est isométrique avec celui des fonctions à p-ième puissance sommable définies dans le carré  $0 \le u \le 1$ ,  $0 \le v \le 1$ . Il existe, en effet, une fonction biunivoque  $t = \varphi(u, v)$  qui transforme ce carré (sauf un ensemble de mesure nulle) en intervalle [0, 1] (encore sauf un ensemble de mesure nulle) de manière que les ensembles mesurables se trouvent transformés en ensembles de mesure égale.

En faisant donc correspondre à toute fonction  $x(t) \subset (L^{(p)})$  la fonction  $y(u, v) = x[\varphi(u, v)]$ , on obtient une transformation des deux espaces fonctionnels l'un en l'autre qui, comme il est facile de voir, n'altère pas les distances.

#### § 5. Rotations

Nous appelons rotation d'un espace E du type (B) autour du point  $x_0 \subset E$  toute transformation biunivoque et isométrique de E en E tout entier qui en transforme le point  $x_0$  en  $x_0$ .

En vertu du théorème 2, p. 155, toute rotation autour de  $\Theta$  est une transformation linéaire.

Nous allons étudier les rotations dans quelques cas particuliers des espaces du type (B).

Espace (C). La rotation la plus générale dans (C) autour de  $\Theta$  est donnée par l'opération de la forme

$$y(t) = \varepsilon \cdot x [\alpha(t)],$$

où  $x(t) \subset (C)$ ,  $\varepsilon = +1$  ou -1 indépendamment de x(t) et  $\alpha(t)$  est une fonction arbitrairement choisie qui transforme l'intervalle fermé  $0 \le t \le 1$  en lui-même d'une façon biunivoque et bicontinue.

La démonstration résulte de la remarque, p. 155, en tenant compte du fait que,  $\varepsilon(t)$  étant une fonction continue telle que  $|\varepsilon(t)| = 1$ , on a  $\varepsilon(t) = \text{const.}$ 

Espace (c). Nous pouvons considérer cet espace comme celui des fonctions continues définies dans un ensemble borné et fermé de nombres réels ayant un seul point d'accumulation. En vertu de la remarque, p. 159, on en déduit facilement le théorème suivant.

La rotation la plus générale dans (c) autour de  $\Theta$  est donnée par l'opération y=U(x) où

$$x = \{\xi_n\} \subset (c), \quad y = \{\eta_n\} \subset (c) \quad \text{et} \quad \eta_n = \varepsilon_n \cdot \xi_{\varphi(n)},$$

 $\{\epsilon_n\}$  désignant une suite convergente quelconque telle que  $|\epsilon_n|=1$  pour n=1,2,... et  $\varphi(n)$  une fonction arbitrairement choisie qui transforme d'une manière biunivoque l'ensemble des nombres naturels en lui-même.

Espace  $(L^2)$ . Toute rotation de  $(L^2)$  autor de  $\Theta$  est de la forme

(15) 
$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \int_0^1 \alpha_n(t) x(t) dt,$$

où  $x(t) \subset (L^2)$  et  $\{\alpha_n(t)\}$ ,  $\{\beta_n(t)\}$  sont des suites arbitraires, complètes dans  $(L^2)$ , de fonctions orthogonales normées définies pour  $0 \le t \le 1$ .

Démonstration. On a d'après (15)

$$\int_{0}^{1} y^{2}(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{0}^{1} \alpha_{n}(t) x(t) dt \right]^{2} = \int_{0}^{1} x^{2}(t) dt,$$

d'où ||y|| = ||x||. Toute transformation de la forme (15) est donc en effet une rotation autour de  $\Theta$ .

Réciproquement, soient: y = U(x) une rotation autour de  $\Theta$  donnée dans  $(L^2)$  et  $\{\alpha_n(t)\}$  une suite quelconque, complète dans  $(L^2)$ , orthogonale et normée. En posant  $\beta_n(t) = U[\alpha_n(t)]$  où n = 1, 2, ..., on a donc

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \int_0^1 \alpha_n(t) x(t) dt$$

et par conséquent y(t) = U[x(t)] est de la forme (15). De plus,

(16) 
$$\int_{0}^{1} \beta_{n}^{2}(t) dt = \int_{0}^{1} U^{2} \left[\alpha_{n}(t)\right] dt = \int_{0}^{1} \alpha_{n}^{2}(t) dt = 1$$

et comme  $\beta_i(t) + \beta_j(t) = U[\alpha_i(t) + \alpha_j(t)]$ , on a pour  $i \neq j$ 

$$\int_{0}^{1} [\beta_{i}(t) + \beta_{j}(t)]^{2} dt = \int_{0}^{1} [\alpha_{i}(t) + \alpha_{j}(t)]^{2} dt = 2,$$

d'où en vertu de (16)

(17) 
$$\int_{0}^{1} \beta_{i}(t)\beta_{j}(t)dt = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

En conséquence, si pour une fonction  $\beta(t) \subset (L^2)$  on a  $\int_0^1 \beta_n(t) \beta(t) dt = 0$ , quel que soit n = 1, 2, ..., on aura d'après (15)  $\int_0^1 y(t) \beta(t) dt = 0$  pour toute fonction  $y(t) \subset (L^2)$ , de sorte que  $\beta(t) = 0$ . Il en résulte en vertu de (16)

Chapitre XI. Isométrie, équivalence, isomorphie

163

et (17) que  $\{\beta_n(t)\}$  est une suite complète dans  $(L^2)$  de fonctions orthogonales et normées.

Espace  $(l^2)$ . On peut énoncer pour  $(l^2)$  un théorème tout à fait analogue. C'est une conséquence de l'isométrie des espaces  $(L^2)$  et  $(l^2)$  (v. théorème 1, p. 154).

Espaces  $(L^{(p)})$  et  $(l^{(p)})$  où  $1 \le p \ne 2$ . On a les lemmes suivants:

1. Etant donnée une rotation y = U(x) de  $(L^{(p)})$ , où  $1 \le p \ne 2$ , autour de  $\Theta$ , si on a pour un couple  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  de fonctions appartenant à  $L^{((p))}$ 

(18) 
$$x_1(t) \cdot x_2(t) = 0 \quad \text{presque partout dans } [0, 1],$$

alors pour le couple  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ , où  $y_1 = U(x_1)$  et  $y_2 = U(x_2)$ , on a également

(19) 
$$y_1(t) \cdot y_2(t) = 0 \quad \text{presque partout dans } [0, 1]$$

Démonstration. Pour tout couple de nombres  $\alpha$ ,  $\beta$  on a par hypothèse, d'après (18),  $\|\alpha x_1 + \beta x_2\|^p = |\alpha|^p \cdot \|x_1\|^p + |\beta|^p \cdot \|x_2\|^p$ , d'où par définition de  $y_1$  et  $y_2$  il vient  $\|\alpha y_1 + \beta y_2\|^p = |\alpha|^p \cdot \|y_1\|^p + |\beta|^p \cdot \|y_2\|^p$  et par conséquent

(20) 
$$\int_{0}^{1} |\alpha y_{1}(t) + \beta y_{2}(t)|^{p} dt = |\alpha|^{p} \int_{0}^{1} |y_{1}(t)|^{p} dt + |\beta|^{p} \int_{0}^{1} |y_{2}(t)|^{p} dt.$$

Dans le cas où p=1, on en tire, en posant successivement  $\alpha=\beta=1$  et  $\alpha=-\beta=1$ , la relation  $\int_0^1 |y_1(t)+y_2(t)|\,dt=\int_0^1 |y_1(t)-y_2(t)|\,dt=\int_0^1 [|y_1(t)|+y_2(t)|]\,dt$ , qui n'est possible que lorsque la condition (19) est réalisée. Dans le cas où p>2, on obtient de la relation (20), en désignant par H l'ensemble des valeurs de  $t\subset[0,1]$  pour lesquelles  $y_1(t)\cdot y_2(t)\neq 0$ , la relation

(21) 
$$\int_{H} |\alpha y_{1}(t) + \beta y_{2}(t)|^{p} dt = |\alpha|^{p} \int_{H} |y_{1}(t)|^{p} + |\beta|^{p} \int_{H} |y_{2}(t)|^{p} dt,$$

qui donne, en y posant  $\varphi(\alpha, t) = |\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^p$ , les égalités

(22) 
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = p |\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^{p-1} \cdot \text{sign } [\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)] \cdot y_1(t)$$

et

(23) 
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = p(p-1)|\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^{p-2} \cdot y_1^2(t).$$

Or, comme  $|\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)|^{p-1} \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$  et  $y_1(t) \subset (L^{(p)})$ , on constate aisément l'existence de l'intégrale  $\int_0^\alpha \int_0^1 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right| d\alpha dt$ , d'où selon (22)

(24) 
$$\int_{H} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{d}{d\alpha} \int_{H} \varphi(\alpha, t) dt = p \cdot \operatorname{sign} \alpha \cdot |\alpha|^{p-1} \int_{H} |y_{1}(t)|^{p} dt$$

et par conséquent  $\int_{H} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} dt = 0$ ; il en résulte aussitôt (puisqu'on a selon (23)  $\frac{\partial^{2} \varphi}{\partial \alpha^{2}} \ge 0$ ) que

$$\int_{0}^{\alpha} \int_{H} \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial \alpha^{2}} d\alpha dt = \int_{H} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} dt,$$

d'où selon (24)

$$\int_{H} \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial \alpha^{2}} dt = p(p-1)|\alpha|^{p-2} \int_{H} |y_{1}(t)|^{p} dt$$

et par conséquent selon (23)

(25) 
$$\int_{H} |\alpha y_{1}(t) + \beta y_{2}(t)|^{p-2} \cdot y_{1}^{2}(t) dt = |\alpha|^{p-2} \int_{H} |y_{1}(t)|^{p} dt.$$

On tire de (25), en posant  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$  l'égalité

(26) 
$$\int_{H} |y_{2}(t)|^{p-2} \cdot |y_{1}(t)|^{2} dt = 0,$$

ce qui entraı̂ne par définition de H que mH = 0 (1).

Enfin, dans le cas où 1 , considérons pour <math>i = 1 et 2 la fonctionnelle  $Y_i(y) = \int_0^1 Y_i(t) y(t) dt$  où  $y(t) \in (L^{(p)})$  et  $Y_i(t) = |y_i(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} y_i(t)$ . L'opération conjuguée  $X = \overline{U}(Y)$  est une rotation de l'espace  $(L^{(\frac{p}{p-1})})$  autour de  $\Theta(x)$ . Posons  $X_i = \overline{U}(Y_i)$  et  $X_i(x) = \int_0^1 X_i(t) x(t) dt$  où  $x \in (L^{(p)})$ . On a  $X_i(x_i) = Y_i(y_i) = |Y_i| \cdot |y_i| = |X_i| \cdot |x_i|$ , d'où en vertu de l'inégalité de Riesz  $X_i(t) = 0$  pour les mêmes valeurs de t que  $x_i(t) = 0$ . Par conséquent  $X_1(t) \cdot X_2(t) = 0$  et comme  $\frac{p}{p-1} > 2$ , on conclut en vertu du cas précédent que  $Y_1(t) \cdot Y_2(t) = 0$ , donc que  $y_1(t) \cdot y_2(t) = 0$ . La condition (19) se trouve ainsi démontrée.

2. Etant donnée une rotation y = U(x) de  $(l^{(p)})$  où  $1 \le p \ne 1$  autour de  $\Theta$ , si on a pour deux suites  $x_1 = \{\xi_n^{(1)}\}$  et  $x_2 = \{\xi_n^{(2)}\}$  appartenant à  $(l^{(p)})$ 

$$\xi_n^{(1)} \cdot \xi_n^{(2)} = 0$$
 pour  $n = 1, 2, ...,$ 

alors pour les suites  $y_1=U(x_1)=\{\eta_n^{(1)}\}$  et  $y_2=U(x_2)=\{\eta_n^{(2)}\}$  on a également

$$\eta_n^{(1)} \cdot \eta_n^{(2)} = 0$$
 pour  $n = 1, 2, ...$ 

<sup>(1)</sup> mH désigne la mesure de l'ensemble H (cf. Introduction, p. 25).

<sup>(2)</sup> Pour la démonstration de ce fait, voir plus loin celle du théorème 11, p. 171.

Chapitre XI. Isométrie, équivalence, isomorphie

165

La démonstration est analogue à celle du lemme précédent pour les espaces  $(L^{(p)})$ , les modifications à apporter étant évidentes.

Les deux lemmes donnent respectivement les théorèmes suivants sur la forme générale des rotations.

- I. Etant donnée une rotation y = U(x) de l'espace  $(L^{(p)})$ , où  $1 \le p \ne 2$ , autour de  $\Theta$ , il existe deux fonctions  $\varphi(t)$  et  $\psi(t)$  définies pour  $0 \le t \le 1$  et telles que les conditions suivantes soient remplies:
- (a) la fonction  $\varphi(t)$  transforme biunivoquement l'intervalle fermé [0,1] presque entier en même intervalle presque entier de façon que les ensembles mesurables se trouvent transformés en ensembles mesurables et réciproquement,
  - (b) on a pour presque tout  $t \subset [0, 1]$

$$\psi(t) = \left[\lim_{h \to +0} \frac{mI[t, t+h]}{h}\right]^{1/p},$$

où I[t, t+h] désigne l'image de l'intervalle fermé [t, t+h] donnée par la fonction  $\varphi$  (c.-à-d. l'ensemble des points  $\varphi$ (s) pour  $t \leq s \leq t+h$ ),

(c) on a pour tout  $x \subset (L^{(p)})$ 

$$y(t) = x [\varphi(t)] \cdot \psi(t),$$

ou y(t) = U[x(t)].

Réciproquement, si  $\varphi(t)$  est une fonction satisfaisant à la condition (a), il existe une fonction  $\psi(t)$  définie par (b) et l'opération y=U(x) définie par (c) est une rotation de  $(L^{(p)})$  autour de  $\Theta(^1)$ .

- II. Etant donnée une rotation quelconque y = U(x) de l'espace  $(l^{(p)})$  où  $1 \le p \ne 2$  autour de  $\Theta$ , il existe une fonction  $\varphi(n)$  et une suite de nombres  $\{\varepsilon_n\}$  telles que
- (a) la fonction  $\varphi$  (n) transforme l'ensemble des nombres naturels tout entier en lui-même d'une manière biunivoque,
  - (b) on  $a |\varepsilon_n| = 1$  pour n = 1, 2, ...,
- (c) on a pour tout couple de suites  $x = \{\xi_n\} \subset (l^{(p)})$  et  $y = \{\eta_n\} \subset (l^{(p)})$  où y = U(x)

$$\eta_n = \varepsilon_n \cdot \xi_{\varphi(n)} \quad pour \quad n = 1, 2, ...$$

Réciproquement, pour  $\varphi(n)$  et  $\{\varepsilon_n\}$  quelconques satisfaisant aux conditions (a) et (b), l'opération y = U(x) définie par la condition (c) est une rotation.

Démonstration. Soit d'abord y = U(x) une rotation de  $(l^{(p)})$  autour de  $\Theta$ . Posons

(27) 
$$\xi_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = n, \\ 0 & \text{pour } i \neq n, \end{cases}$$

et  $x_i = \{\xi_n^{(i)}\}$  pour i = 1, 2, ... On a évidemment pour tout  $x = \{\xi_n\} \subset \{l^{(p)}\}$ 

$$(28) x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i.$$

En posant  $y_i = U(x_i) = \{\eta_n^{(i)}\}$ , on a donc en vertu de (28) pour  $y = U(x) = \{\eta_n\}$  l'égalité  $y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i y_i$ , d'où

(29) 
$$\eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_n^{(i)} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, ...$$

Selon (27) on a  $\xi_n^{(i)} \cdot \xi_n^{(j)} = 0$ , lorsque  $i \neq j$ ; on en conclut en vertu du lemme, p. 163, 2, que

(30) 
$$\eta_n^{(i)} \cdot \eta_n^{(j)} = 0$$
 pour  $i \neq j$  et  $n = 1, 2, ...$ 

Comme y peut être une suite quelconque appartenant à  $(l^{(p)})$ , il n'existe en vertu de (29) et (30) pour tout n naturel qu'un seul nombre  $\varphi(n)$  tel que  $\eta_n^{\varphi(n)} \neq 0$ . Il en résulte d'après (29) que l'on a

(31) 
$$\eta_n = \xi_{\varphi(n)} \cdot \varepsilon_n \quad \text{pour} \quad \varepsilon_n = \eta_n^{\varphi(n)} \text{ et } n = 1, 2, \dots,$$

ce qui réalise la condition (c).

D'autre part,  $n_1 \neq n_2$  entraîne  $\varphi(n_1) \neq \varphi(n_2)$ , car dans le cas contraire on aurait selon (31) pour toute suite  $\{\eta_n\} \subset (l^{(p)})$  l'égalité  $\varepsilon_{n_2} \eta_{n_1} - \varepsilon_{n_1} \eta_{n_2} = 0$  qui est impossible; et s'il existait un  $n_0$  naturel tel qu'on ait  $\varphi(n) \neq n_0$  pour n = 1, 2, ..., on aurait selon (31) pour la suite  $x = \{\xi_n\}$  où

$$\xi_n = \begin{cases} 1 & \text{pour} & n = n_0, \\ 0 & \text{pour} & n \neq n_0, \end{cases}$$

l'égalité  $\eta_n = 0$  pour n = 1, 2, ..., ce qui est aussi impossible. Ainsi la condition (a) se trouve également démontrée.

Enfin, on a par définition de la rotation: |y| = |x|, ce qui donne en vertu de (31)

(32) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_{\varphi(n)}|^p \cdot |\varepsilon_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \quad \text{pour tout } x = \{\xi_n\} \subset (l^{(p)}).$$

En conséquence, si on choisit, pour tout  $n_0$  naturel arbitrairement donné, la suite  $x = \{\xi_n\}$  de façon à avoir

$$\xi_{\varphi(n)} = \begin{cases}
1 & \text{pour} & n = n_0, \\
0 & \text{pour} & n \neq n_0,
\end{cases}$$

on obtient de (32)  $|\varepsilon_{n_0}|^p = 1$ , d'où  $|\varepsilon_{n_0}| = 1$ , ce qui prouve la condition (b). La réciproque est évidente.

<sup>(1)</sup> Pour la démonstration de ce théorème voir S. Banach, Sur les rotations dans les champs des fonctions intégrables avec p-ième puissance, Studia Mathematica IV (à paraître). [Ce travail n'a pas été publié.]

### § 6. Isomorphie et équivalence

Deux espaces E et  $E_1$  du type (F) s'appellent isomorphes, lorsqu'il existe une opération biunivoque et linéaire qui transforme E et  $E_1$  tout entier.

Soit y = U(x), où  $x \subset E$  et  $y \subset E_1$ , cette opération; en vertu du théorème 5 (Chapitre III, § 3), p. 53, l'opération inverse  $x = U^{-1}(y)$  est également linéaire, de sorte que l'opération y = U(x) transforme E en  $E_1$  d'une manière bicontinue.

Les espaces E et  $E_1$  sont dits équivalents, lorsqu'il existe une opération biunivoque et linéaire y = U(x) qui transforme E en  $E_1$  de façon que |y| = |x| pour tout  $x \subset E$ .

L'équivalence de deux espaces en entraı̂ne par conséquent l'isomorphie, mais, comme nous le verrons, la réciproque n'est pas vraie.

Considérons deux exemples.

1° Soit  $(c_0)$  l'espace des suites de nombres réels convergentes vers 0. On a le théorème:

Les espaces (c) et  $(c_0)$  sont isomorphes.

En effet, en posant pour  $x = \{\xi_i\} \subset (c)$ 

$$\eta_1 = \lim_{i \to \infty} \xi_i \quad \text{et} \quad \eta_i = \xi_{i-1} - \eta_1 \quad \text{pour} \quad i > 1,$$

on a évidemment  $\lim_{i\to\infty}\eta_i=0$ , d'où, en posant  $y=\{\eta_i\}$ , on a  $y\subset(c_0)$  et il est facile de voir que l'opération y=U(x) ainsi définie est additive et remplit la condition  $|U(x)|\leqslant 2|x|$ ; elle est donc linéaire.

Réciproquement, si  $y = \{\eta_i\} \subset (c_0)$ , on n'a qu'à poser pour  $x = \{\xi_i\}$ 

$$\xi_i = \eta_{i+1} + \eta_1$$
 où  $i = 1, 2, ...,$ 

pour obtenir  $x \in (c)$ , puisque  $\lim_{i \to \infty} \xi_i = \eta_1$ , et pour voir que y = 0 entraîne x = 0

L'opération y=U(x) est donc linéaire et détermine une transformation biunivoque de (c) en  $(c_0)$ .

2° Les espaces des fonctionnelles linéaires définies dans

$$(L^{(p)}), (l^{(p)})$$
 où  $p > 1, (L), (l)$  et  $(c)$ 

sont équivalents respectivements aux espaces

$$(L^{(q)}), (l^{(q)})$$
 où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $(M), (m)$  et  $(l)$ .

Ce n'est qu'une autre façon de formuler les théorèmes sur la forme générale des fonctionnelles linéaires établis au Chapitre IV, § 4 (voir p. 69-76).

Le théorème 2, p. 155, implique immédiatement le

Théorème 4. Les espaces E et  $E_1$  du type (B) qui sont isométriques sont équivalents.

# § 7. Produits des espaces du type (B)

Etant donnés deux espaces E et  $E_1$  du type (B), désignons par  $E \times E_1$  l'espace que constitue l'ensemble de tous les couples ordonnés x, y où  $x \subset E$  et  $y \subset E_1$ , lorsqu'on y définit l'addition et la multiplication par nombres, en posant

$$x, y+x', y'=x+x', y+y'$$
 et  $hx, y=hx, hy$ 

(bien entendu, où  $x' \subset E$ ,  $y' \subset E_1$  et h étant un nombre) et en y définissant la norme de façon que la condition suivante soit remplie:

(33) 
$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$
 et  $\lim_{n \to \infty} y_n = y_0$  équivant à  $\lim_{n \to \infty} ||x_n, y_n - x_0, y_0|| = 0$ .

Ainsi défini, l'espace  $E \times E_1$  est également du type (B). Nous l'appellerons produit des espaces E et  $E_1$ .

Il est aisé de voir que la condition (33) se trouvera remplie, si on admet en particulier comme norme du couple z=x,y l'une ou l'autre des expressions

1) 
$$||z|| = [||x||^p + ||y||^p]^{1/p}$$
 où  $p \ge 1$ ,

2) 
$$||z|| = \max[||x||, ||y||],$$

et qu'elles ne sont pas les seules convenables pour remplir cette condition. Or, on aperçoit aussitôt qu'en choisissant des normes quelconques, pourvu qu'elles soient conformes à la condition (33), on obtiendra toujours des espaces isomorphes.

Pour mettre en évidence quelle norme a été adoptée, convenons de désigner le produit des espaces E et  $E_1$  dans le cas de la norme 1) par  $(E \times E_1)_{\mu}$  et dans celui de la norme 2) par  $(E \times E_1)_{\mu}$ .

On définit de la même façon le produit d'un nombre fini d'espaces  $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$  du type (B). Il est évident que le produit des espaces séparables est un espace séparable.

Le produit  $E \times E$  portera le nom du carré de E et sera désigné par  $E^2$ . Théorème 5. Les espaces  $(L^{(p)})$ ,  $(l^{(p)})$  où  $p \ge 1$  et (c) sont isomorphes respectivement avec leur carré.

Démonstration. Il suffit de faire correspondre à toute fonction  $x(t) \subset (L^{(p)})$  le couple des fonctions  $x_1(t), x_2(t)$  définies par les formules

$$x_1(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)$$
 et  $x_2(t) = x\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right)$  où  $0 \le t \le 1$ ,

pour avoir une transformation biunivoque et linéaire de  $(L^{(p)})$  en  $(L^{(p)})^2$ . De même, il suffit de faire correspondre à toute suite  $x = \{\xi_n\} \subset (l^{(p)})$  le couple de suites  $x_1 = \{\eta_n\}, x_2 = \{\zeta_n\}$  définies par les formules

$$\eta_n = \xi_{2n}$$
 et  $\zeta_n = \xi_{2n-1}$  où  $n = 1, 2, ...$ 

pour que l'espace  $(l^{(p)})$  se trouve transformé en  $(l^{(p)})^2$  d'une manière biunivoque et linéaire.

Enfin, faisons correspondre à toute suite  $x = \{\xi_n\} \subset (c)$  le couple  $x_1 = \{\eta_n\}, x_2 = \{\zeta_n\}$  défini par les formules

$$\eta_n = \xi_{2n} - \xi_1$$
 et  $\zeta_n = \xi_{2n+1} - \lim_{n \to \infty} \xi_n + \xi_1$  où  $n = 1, 2, ...$ 

Il vient

$$\xi_1 = \lim_{n \to \infty} \zeta_n$$
,  $\xi_{2n} = \eta_n + \lim_{n \to \infty} \zeta_n$  et  $\xi_{2n+1} = \zeta_n + \lim_{n \to \infty} \eta_n$  où  $n = 1, 2, ...$ 

et on voit que c'est une transformation biunivoque et linéaire de (c) en (c)<sup>2</sup>.

Théorème 6. L'espace (C) est isomorphe avec le produit  $(C) \times (c)$  (1).

Démonstration. Désignons par E le sous-espace de (C) formé de fonctions  $x(t) \subset (C)$  qui satisfont à la condition

$$x\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \dots$$

Construisons pour toute function  $x(t) \subset (C)$  une function  $\bar{x}(t) \subset (C)$ telle que  $\tilde{x}(1/n) = x(1/n)$  et qui soit linéaire dans les intervalles  $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$  pour tout *n* naturel.

Faisons correspondre à tout  $x(t) \subset (C)$  le couple (formé d'une fonction et d'une suite de nombres)

$$y(t), \left\{x\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$
 où  $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ .

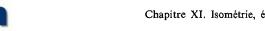
On a évidemment  $v(t) \subset E$  et  $\{x(1/n)\}\subset (c)$ .

Il est facile de voir que la transformation établie par cette correspondance est linéaire.

On aperçoit également que pour tout couple y(t),  $\{\xi_n\} \subset E \times (c)$  il existe une fonction continue x(t) telle que  $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$  et  $\xi_n = x(1/n)$  pour  $n = 1, 2, \dots$ , de sorte que la transformation considérée est biunivoque et épuise les espaces (C) et  $E \times (c)$  entièrement. Ces deux espaces sont donc isomorphes.

Il en résulte l'isomorphie des espaces  $(C) \times (c)$  et  $E \times (c) \times (c) = E \times (c)^2$ . Or,  $(c)^2$  étant (selon le théorème 5 qui précède) isomorphe avec (c), l'espace  $(C) \times (c)$  est isomorphe avec  $E \times (c)$ , donc avec (C), e.g.f.d.

Théorème 7. L'espace (C) est isomorphe avec chacun des espaces ( $C^{(p)}$ )  $o\tilde{u} p = 1, 2, ... (^2).$ 



Démonstration. Faisons correspondre à toute fonction  $x(t) \subset (C^{(p)})$ (cf. Introduction, § 7, p. 31, 7) le couple formé de la fonction  $y(t) = x^{(p)}(t)$ et du système de p nombres:  $x(0), x'(0), ..., x^{(p-1)}(0)$ . En désignant par  $R_p$ l'espace à p dimensions,  $(C^{(p)})$  est donc isomorphe avec  $(C) \times R_p$  et par conséquent, en vertu du théorème 6 qui précède, avec  $(C) \times (c) \times R_p$ .

Or, comme  $(c) \times R_n$  est isomorphe avec (c), l'espace  $(C^{(p)})$  est isomorphe avec  $(C) \times (c)$ , donc (encore d'après le théorème 6) avec l'espace (C), c.q.f.d.

Théorème 8. L'espace (C) est isomorphe avec l'espace  $(C)^2$  (1).

Démonstration. Faisons correspondre à tout couple x(t), y(t) de fonctions de (C) le couple z(t),  $\xi$  où  $z(t) \subset (C)$  est la fonction définie par les formules

$$z(t) = \begin{cases} x(2t) & \text{pour } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ y(2t-1) - y(0) + x(1) & \text{pour } \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

et  $\xi$  est le nombre déterminé pour tout  $y(t) \subset (C)$  par l'équation  $\xi = y(0)$ .

Ainsi l'espace  $(C)^2$  se trouve transformé en  $(C) \times R_1$ , où  $R_1$  désigne l'espace de tous les nombres réels. Cette transformation est linéaire et comme on a par définition x(t) = z(t/2) et  $y(t) = z(1/2+t/2)-z(1/2)+\xi$ , elle est biunivoque. On a ainsi l'isomorphie des espaces  $(C)^2$  et  $(C) \times R_1$ et comme en vertu du théorème 6, p. 168, (C) est isomorphe avec  $(C) \times (c)$ , l'espace  $(C)^2$  est isomorphe avec  $(C) \times (c) \times R_1$ , donc, par suite de l'isomorphie entre  $(c) \times R_1$  et (c), avec l'espace  $(C) \times (c)$  et par conséquent (encore en vertu du théorème 6) avec l'espace (C), c.q.f.d.

Remarque. On ignore si l'espace (C) est isomorphe avec celui de toutes les fonctions continues définies dans le carré.

# § 8. Espace (C) comme l'espace universel (2)

THÉORÈME 9. Tout espace E du type (B) séparable est équivalent à un sous-espace linéaire fermé de l'espace (C).

Démonstration. Soient  $\Gamma$  l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires à la norme  $\leq 1$  définies dans E et  $\{x_n\}$  la suite d'éléments de E à la norme  $\leq 1$ , dense dans la sphère  $|x| \leq 1$ .

Comme distance, posons pour tout couple  $f_1, f_2$  de fonctionnelles appartenant à  $\Gamma$ 

(34) 
$$(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|f_1(x_n) - f_2(x_n)|}{1 + |f_1(x_n) - f_2(x_n)|}$$

Nous allons montrer que, avec cette définition de la distance,  $\Gamma$  est complet et compact.

<sup>(1)</sup> Ce théorème a été établi par M. K. Borsuk,

<sup>(2)</sup> Ce théorème a été démontré par M. K. Borsuk.

<sup>(1)</sup> Ce théorème est dû aussi à M. K. Borsuk.

<sup>(2)</sup> Les théorèmes de ce § ont été trouvés en commun par M. S. Mazur et moi.

Considérons une suite  $\{f_i\}$  où  $f_i \subset \Gamma$  pour i=1,2,..., et soit  $\lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to \infty}} (f_p,f_q)=0$ . En vertu de (34), il existe donc la limite  $\lim_{\substack{i\to\infty\\ i\to \infty}} f_i(x_n)$ .

Comme  $|f_i| \le 1$ , la suite  $\{f_i(x)\}$  est en vertu du théorème 3 (Chapitre V, § 1), p. 85, convergente pour tout  $x \subset E$ ; par conséquent la suite des fonctionnelles  $\{f_i\}$  est faiblement convergente vers une fonctionnelle f et on a  $|f| \le 1$ . d'où  $f \subset \Gamma$ . Comme  $\lim_{i \to \infty} f_i(x_n) = f(x_n)$  pour n = 1, 2, ..., on conclut de (34) que  $\lim_{i \to \infty} (f_i, f) = 0$ . Ainsi  $\Gamma$  est complet.

D'autre part, on peut exstraire de la suite  $\{f_i\}$  par le procédé de la diagonale une suite partielle  $\{f_{i_k}\}$  telle que  $\lim_{k\to\infty} f_{i_k}(x_n)$  existe pour n=1,2,..., d'où, comme auparavant, l'existence d'une fonctionnelle  $f\subset \Gamma$  telle que  $\lim_{k\to\infty} (f_{i_k},f)=0$ . Ainsi  $\Gamma$  est compact.

Il existe par conséquent (1) une transformation continue de l'ensemble parfait et non dense de Cantor  $P \subset [0,1]$  en ensemble  $\Gamma$ . En désignant par  $f_t \subset \Gamma$  la fonctionnelle qui vient correspondre au point  $t \subset P$ , considérons un élément quelconque  $x \subset E$  et définissons y(t) comme il suit: posons pour tout  $t \subset P$ 

$$y(t) = f_t(x)$$

et pour les points de l'ensemble [0, 1]-P complétons la fonction y(t) d'une façon linéaire, en posant notamment pour tout  $t \subset [0, 1]-P$ 

$$y(t) = \frac{y(t') - y(t'')}{t' - t''} \cdot (t - t'') + y(t''),$$

où t' et t'' désignent les points les plus proches de P tels que t' < t < t''. Examinons les propriétés de la fonction y(t) ainsi définie.

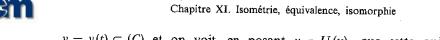
Si  $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$  où  $t_n \subset P$ , la suite  $\{f_{t_n}\}$  converge faiblement vers  $f_{t_0}$ , d'où  $\lim_{n\to\infty} f_{t_n}(x) = f_{t_0}(x)$ , donc  $\lim_{n\to\infty} y(t_n) = y(t_0)$ . La fonction y est par conséquent continue dans P. Comme linéaire ailleurs, elle est donc continue dans [0, 1] tout entier; ainsi  $y(t) \subset (C)$ .

D'autre part, il existe en vertu du théorème 3 (Chapitre IV, § 2), p. 64, une fonctionnelle  $f \subset \Gamma$  telle que |f(x)| = ||x||. Soit  $t_0 \subset [0, 1]$  le point tel que  $f = f_{t_0}$ . On a donc  $|y(t_0)| = |f_{t_0}(x)| = ||x||$  et comme

$$|y(t)| = |f_t(x)| \le |f_t| \cdot ||x|| \le ||x||$$
 pour tout  $t \subset P$ ,

on en conclut en raison du fait que la fonction |y(t)| atteint son maximum dans l'ensemble P, que  $\max_{0 \le t \le 1} |y(t)| = ||x||$ .

Ainsi, nous avons fait correspondre à tout élément  $x \subset E$  un élément



 $y = y(t) \subset (C)$  et on voit, en posant y = U(x), que cette opération est additive. Comme ||y|| = ||x||, elle est linéaire et transforme l'espace E en un sous-espace  $E_1$  de (C) d'une façon isométrique. Les espaces E et  $E_1 \subset (C)$  sont donc équivalents, c.q.f.d.

Théorème 10. Tout espace métrique séparable E peut être transformé d'une manière isométrique en un sous-espace de (C).

Démonstration. Selon une remarque de M. Fréchet (1) tout espace métrique séparable E se laisse transformer isométriquement en un sous-espace de (m). Une telle transformation s'obtient, comme on le vérifie sans peine, en faisant correspondre à tout  $x \subset E$  la suite  $\{\xi_n\}$  définie par la formule

$$\xi_n = (x, x_n) - (x_0, x_n)$$
 pour  $n = 1, 2, ...,$ 

où la suite  $\{x_n\}$  forme un ensemble dense dans E.

En conséquence, nous pouvons nous borner au cas où  $E \subset (m)$ . On montre facilement que l'espace formé de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de E et de leurs limites est un espace du type (B) séparable. En vertu du théorème 9 qui précède il existe donc une transformation isométrique de cet espace, et à plus forte raison de son sous-espace E, en un sous-espace de (C), c.q.f.d.

Remarque. En vertu des théorèmes 9 et 10 qui viennent d'être établis l'espace (C) peut être considéré comme l'espace universel pour les espaces séparables du type (B), resp. métriques. L'étude des espaces séparables du type (B) se réduit donc à celle des sous-ensembles linéaires fermés de l'espace (C).

## § 9. Espaces conjugués

Etant donné un espace E du type (B), l'espace  $\overline{E}$  de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E est évidemment aussi du type (B). Nous appellerons  $\overline{E}$  l'espace conjugué avec E.

Théorème 11. Si deux espaces E et  $E_1$  du type (B) sont isomorphes, resp. équivalents, les espaces  $\bar{E}$  et  $\bar{E}_1$  sont également isomorphes, resp. équivalents.

Démonstration. En effet, si une opération linéaire y=U(x) transforme E en  $E_1$  d'une manière biunivoque et bicontinue, l'opération conjuguée  $X=\bar{U}(Y)$  transforme en vertu du théorème 5 (Chapitre X, § 1), p. 141, l'espace  $\bar{E}_1$  en espace  $\bar{E}$  tout entier également d'une manière biunivoque et linéaire, d'où l'isomorphie de ces derniers espaces.

<sup>(1)</sup> Voir p. ex. F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin 1927, p. 197.

<sup>(1)</sup> Cf. M. Fréchet, Les dimensions d'un ensemble abstrait, Mathematische Annalen 68 (1910), p. 161.

Si, en outre, E et  $E_1$  sont équivalents, on a pour les fonctionnelles linéaires correspondantes X et Y:

$$|X| = \text{borne sup } |X(x)| = \text{borne sup } |Y[U(x)]| = \text{borne sup } |Y(y)| = |Y|,$$

de sorte que les espaces  $\bar{E}$  et  $\bar{E}_1$  sont dans ce cas équivalents, c.q.f.d.

Remarque. Cependant, l'équivalence des espaces  $\bar{E}$  et  $\bar{E}_1$  n'entraîne pas toujours celle des espaces E et  $E_1$ .

Considérons, à titre d'exemple, les espaces E = (c) et  $E_1 = (c)_m^2 (1)$ . Comme espaces conjugués avec eux on obtient  $\bar{E} = (l)$  et  $\bar{E}_1 = (l)_l^2 (1)$  et on établit facilement leur équivalence. Mais il n'en est pas ainsi des espaces E et  $E_1$ . Nous pouvons regarder E comme l'espace des fonctions continues définies dans l'ensemble Q composé de nombres 0 et 1/n, où n = 1, 2, ..., et l'espaces  $E_1$  peut être considéré comme celui des fonctions continues définies dans l'ensemble  $Q_1$  formé de nombres 0, 1, 1/n et 1+1/n où n = 1, 2, ... Or, les ensembles Q et  $Q_1$  en question n'étant pas homéomorphes, on en conclut en vertu du théorème 1, 2, ... que les espaces 1, 2, ... et 1, 2, ... or, les ensembles 1, 2, ... et 1, 2, ... or, les ensembles 1, 2, ... et 1, 2, ... or, les ensembles 1, 2, ... et 1, 2, ... or, les ensembles 1, 2, ... et 1, 2, ... or, les ensembles 1, 2, ... et 1, 2, ... or, les ensembles 1, 2, ... et 1, 2, ... et 1, 2, ... et 1, 2, ... et 1, 2, ... or, les ensembles 1, 2, ... et 1, 2, ..

Théorème 12. Si l'espace conjugué  $\bar{E}$  est séparable, l'espace E l'est également.

Démonstration.  $\Gamma \subset \overline{E}$  désignant l'ensemble des fonctionnelles linéaires définies dans E à la norme 1, il existe par l'hypothèse une suite  $\{X_n\}$ , où  $X_n \subset \Gamma$ , dense dans  $\Gamma$ .

Soit  $\{x_n\}$  la suite d'éléments de E qui remplissent les conditions

(35) 
$$|x_n| = 1$$
 et  $X_n(x_n) > \frac{1}{2}$  pour  $n = 1, 2, ...$ 

En supposant que l'espace E ne soit pas séparable, on peut affirmer que la suite  $\{x_n\}$  n'est pas fondamentale dans E, donc, en vertu du théorème 7 (Chapitre IV, § 3), p. 67, elle n'y est pas totale. Il existe par conséquent une fonctionnelle linéaire  $X \subset \Gamma$  telle que

(36) 
$$|X| = 1$$
 et  $X(x_n) = 0$  pour  $n = 1, 2, ...$ 

En posant  $Z_n = X_n - X$ , on a par consequent selon (35) et (36)  $Z_n(x_n) = X_n(x_n) - X(x_n) > \frac{1}{2}$ , d'où  $|Z_n| > \frac{1}{2}$ , donc  $|X_n - X| > \frac{1}{2}$  pour tout n naturel, ce qui est impossible, la suite  $\{X_n\}$  étant supposée dense dans  $\Gamma$  et X appartenant à  $\Gamma$ .

Théorème 13. Etant donné un espace E du type (B) séparable et tel que toute suite  $\{x_i\}$  d'éléments de E à normes bornées dans leur ensemble contient une suite partielle faiblement convergente vers un élément de E, l'espace E est équivalent à l'espace  $\bar{E}$  (conjugué de  $\bar{E}$ ).

Démonstration. Soit G l'ensemble des fonctionnelles linéaires F(X)

définies dans  $\overline{E}$  et telles que  $F(X)=X(x_0)$  pour tout  $X\subset \overline{E}$  et pour un  $x_0\subset E$  qui ne dépend que de F. On a donc  $|F(X)|\leqslant |X|\cdot |x_0|$ , d'où l'inégalité  $|F|\leqslant |x_0|$ . En vertu du théorème 3 (Chapitre IV, § 2), p. 64, il existe d'autre part une fonctionnelle  $X_0\subset \overline{E}$  telle que  $|X_0|=1$  et  $X_0(x_0)=|x_0|$ , donc  $F(X_0)=|x_0|$ , d'où l'inégalité  $|F|\geqslant |x_0|$ . Les deux inégalités donnent  $|F|=|x_0|$ .

G est un ensemble total (dans l'espace  $\bar{E}$  des fonctionnelles linéaires définies dans  $\bar{E}$ ).

En effet, si pour un  $X_0 \subset \overline{E}$  on a  $F(X_0) = 0$ , quel que soit  $F \subset G$ , on a aussi  $X_0(x) = 0$ , quel que soit  $x \subset E$ , donc  $X_0 = 0$ .

Nous allons montrer que l'ensemble G est transfiniment fermé.

Soient à ce but  $\vartheta$  un nombre-limite quelconque et  $\{F_{\xi}\}$  où  $F_{\xi} \subset G$  pour  $1 \leqslant \xi < \vartheta$  une suite transfinie de fonctionnelles à normes bornées dans leur ensemble. Il existe donc un nombre M > 0 tel qu'on a  $|F_{\xi}| < M$  pour  $1 \leqslant \xi < \vartheta$  et par définition de G toute fonctionnelle  $F_{\xi}$  est de la forme  $F_{\xi}(X) = X(x_{\xi})$ . L'espace E étant par hypothèse séparable, soit  $\{x_i\}$  la suite dense dans E.

Pour tout n naturel désignons par  $x_{\xi}^{(n)}$  un terme arbitrairement extrait de  $\{x_i\}$  qui satisfait à l'inégalité

$$|x_{\xi}^{(n)} - x_{\xi}| < \frac{1}{n}$$

et posons

$$F_{\varepsilon}^{(n)}(X) = X(x_{\varepsilon}^{(n)}) \quad \text{pour} \quad X \subset \tilde{E}.$$

Dans le cas où  $\vartheta$  est confinal avec  $\omega$  (donc où il existe une suite  $\{\xi_i\}$  à i naturels de nombres transfinis tels que  $\lim_{i\to\infty} \xi_i = \vartheta$  et  $\xi_i < \vartheta$  pour  $i=1,2,\ldots$ ), la suite  $\{x_{\xi_i}^{(n)}\}$  renferme une suite partielle faiblement convergente vers un élément  $x^{(n)} \subset E$ . Evidemment on a alors

$$\overline{\lim}_{\xi \to 0} F_{\xi}^{(n)}(X) \geqslant \overline{\lim}_{i \to \infty} F_{\xi_i}^{(n)}(X) = \overline{\lim}_{i \to \infty} X(x_{\xi_i}^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)})$$

et par conséquent la fonctionnelle  $F^{(n)}(X) = X(x^{(n)})$  est une limite transfinie de la suite  $\{F_{\xi}^{(n)}\}$ .

Dans le cas où le nombre-limite  $\vartheta$  n'est pas confinal avec  $\omega$ , la suite transfinie  $\{x_{\xi}^{(n)}\}$ , qui ne contient par définition qu'une infinité au plus dénombrable de termes différents, renferme un terme  $x^{(n)}$  tel que pour tout  $\eta < \vartheta$  il existe un  $\xi > \eta$  donnant lieu à l'égalité  $x_{\xi}^{(n)} = x^{(n)}$ . On a alors

$$\overline{\lim_{\xi\to 0}} F_{\xi}^{(n)}(X) = \overline{\lim_{\xi\to 0}} X(x_{\xi}^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)}),$$

de sorte que la fonctionnelle  $F^{(n)}(X) = X(x^{(n)})$  est encore une limite transfinie de la suite  $\{F_{\xi}^{(n)}\}$ .

Ceci établi, considérons la suite  $\{x^{(n)}\}$ . On peut en extraire une suite

<sup>(1)</sup> Pour la signification des indices dans ces symboles voir p. 167.

faiblement convergente vers un  $\bar{x} \subset E$ . Posons  $X(\bar{x}) = F_0(X)$ . On a donc d'une part

(38) 
$$\overline{\lim}_{n\to\infty} F^{(n)}(X) \geqslant F_0(X) \quad \text{pour tout } X \subset \overline{E}$$

et d'autre part, par définition de G,  $F_0 \subset G$ . Or, on a selon (37)  $X(x_i)$  $\geqslant X(x_{\xi}^{(n)}) - \frac{1}{n}|X|$ , d'où, par définition de  $F_{\xi}$  et  $F_{\xi}^{(n)}$ ,

$$\overline{\lim}_{\xi \to \emptyset} F_{\xi}(X) = \overline{\lim}_{\xi \to \emptyset} X(x_{\xi}) \geqslant \overline{\lim}_{\xi \to \emptyset} X(x_{\xi}^{(n)}) - \frac{1}{n} |X|$$

$$= \overline{\lim}_{\xi \to \emptyset} F_{\xi}^{(n)}(X) - \frac{1}{n} |X| \geqslant F^{(n)}(X) - \frac{1}{n} |X|$$

et par conséquent, selon (38),  $\overline{\lim_{\xi \to 0}} F_{\xi}(X) \geqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} F^{(n)}(X) \geqslant F_{0}(X)$ . La fonctionnelle  $F_0$  est donc une limite transfinie de la suite  $\{F_k\}$  et puisque  $F_0 \subset G$ . l'ensemble G est en effet transfiniment fermé.

Comme total et transfiniment fermé, l'ensemble G coincide en vertu de la remarque (Chapitre VIII, § 2), p. 116, et du lemme 3 (Chapitre VIII, § 3), p. 119, avec l'espace  $\bar{E}$ .

Par définition de G, à tout  $F \subset \overline{E}$  vient donc correspondre un  $x \subset E$ tel que, comme il a été prouvé au début, |F| = |x|. L'opération U(x) = Fest par conséquent biunivoque, linéaire et transforme E en  $\bar{E}$  sans altérer la norme. Les espaces E et  $\bar{E}$  sont donc équivalents, c.q.f.d.

Remarque. Ainsi p.ex. les espaces  $(L^{(p)})$  et  $(l^{(p)})$  où p>1 sont équivalents aux espaces conjugués avec ceux des fonctionnelles linéaires définies dans eux (cf. p. 166, 2°).

THÉORÈME 14. L'espace conjugué avec le produit des espaces du type (B) est isomorphe au produit des espaces conjugués avec eux.

Démonstration  $E_1, E_2, ..., E_n$  étant des espaces du type (B), il s'agit d'établir l'isomorphie entre l'espace  $\bar{E}$  où  $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$  et l'espace  $\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times ... \times \overline{E}_n$ . On peut se borner au cas où n=2.

Désignons respectivement par  $x_1, x_2$  et z les éléments de  $E_1, E_2$  et E et par  $X_1, X_2$  et Z les fonctionnelles linéaires définies dans ces espaces.

Soit H l'ensemble de tous les couples  $x_1$ ,  $\Theta$  où  $x_1 \subset E_1$ . Nous pouvons donc regarder H comme un sous-ensemble de  $E = E_1 \times E_2$  et par conséquent toute fonctionnelle linéaire Z, considérée dans l'espace H, détermine une fonctionnelle linéaire  $X_1$  définie dans  $E_1$ . Posons

$$Z(z) = X_1(x_1)$$
 pour  $z = x_1, \Theta$ 

et d'une façon analogue

$$Z(z) = X_2(x_2)$$
 pour  $z = \Theta, x_2$ .



Pour  $z = x_1, x_2$  on a donc, comme il est facile de vérifier,

(39) 
$$Z(z) = X_1(x_1) + X_2(x_2).$$

Réciproquement, étant données deux fonctionnelles linéaires  $X_1 \subset \bar{E}_1$ et  $X_2 \subset \bar{E}_2$ , la formule (39) détermine la fonctionnelle  $Z \subset \bar{E}$ .

La correspondance est biunivoque et établit une transformation linéaire de  $\bar{E}_1 \times \bar{E}$  en  $\bar{E}$  tout entier, donc l'isomorphie de ces deux espaces, q.f.d.

Remarque. En posant  $E = [E_1 \times E_2 \times ... \times E_n]_{lp}$ , resp.  $E = [E_1 \times E_2 \times ...$  $... \times E_n$ , on aperçoit aisément que l'espace conjugué  $\bar{E}$  est isométrique pour p > 1 avec l'espace  $[\bar{E}_1 \times \bar{E}_2 \times ... \times \bar{E}_n]_{p^{p(p-1)}}$  et pour p = 1 avec l'espace  $[\bar{E}_1 \times \bar{E}_2 \times ... \times \bar{E}_n]_m$ , resp. avec l'espace  $[\bar{E}_1 \times \bar{E}_2 \times ... \times \bar{E}_n]_L$ .

#### CHAPITRE XII

### Dimension linéaire

## § 1. Définitions

Etant donnés deux espaces E et  $E_1$  du type (F), nous dirons que la dimension linéaire de l'espace E ne dépasse pas celle de l'espace  $E_1$ , en formule:

$$\dim_t E \leqslant \dim_t E_1,$$

si E est isomorphe avec un sous-espace vectoriel fermé de  $E_1$ .

Les espaces E et E<sub>1</sub> s'appelleront de dimension linéaire égale, en formule:

$$\dim_l E = \dim_l E_1,$$

lorsqu'on a les relations (1) et

$$\dim_{l} E_{1} \leq \dim_{l} E$$

à la fois.

L'espace E sera dit de dimension linéaire inférieure que  $E_1$ , lorsqu'on a la relation (1) sans avoir (2). En formule:

$$\dim_l E < \dim_l E_1$$
.

Enfin, les dimensions linéaires de ces espaces s'appelleront incomparables, lorsque les deux relations (1) et (2) sont en défaut.

Les espaces isomorphes sont donc toujours de dimension linéaire égale. On ne sait pas si la réciproque est aussi vraie, mais je considère comme très probable qu'il existe des espaces du type (B), même séparables, qui soient des dimensions linéaires égales sans être isomorphes.

Tout espace qui est isomorphe avec l'espace euclidien n-dimensionnel sera dit simplement à n dimensions. Un espace du type (B) pour lequel un tel n n'existe pas sera dit à une infinité de dimensions.

Chapitre XII. Dimension linéaire

177

# § 2. Dimension linéaire des espaces (c) et $(l^{(p)})$ où $p \ge 1$

Théorème 1. Si on a pour un espace E du type (B)

$$\dim_{l} E < \dim_{l}(c)$$

ou bien

(4) 
$$\dim_l E < \dim_l(l^{(p)}) \quad pour \ un \ p \geqslant 1,$$

E est un espace à un nombre fini de dimensions.

Démonstration. L'espace (c) étant isomorphe avec l'espace  $(c_0)$  des suites de nombres convergentes vers 0 (v. Chapitre XI, § 6, p. 166, 1°), il existe en vertu de (3) un ensemble linéaire et fermé  $G \subset (c_0)$ , isomorphe avec E. En supposant que E, donc aussi G, est à une infinité de dimensions, il existerait pour tout N naturel une suite de N+1 éléments  $z_i \subset G$  où i=1,2,...,N+1 telle que

$$\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i z_i = 0 \quad \text{entraı̂ne} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{N+1} = 0.$$

Par conséquent, si on pose  $z_i = \{\beta_n^i\}$ , on trouvera des nombres  $\alpha_i$ , où i = 1, 2, ..., N+1, qui (sans être tous égaux à 0) vérifient les équations  $\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \, \beta_n^i = 0 \text{ pour } n = 1, 2, ..., N. \text{ En désignant par } \{\beta_n\} \text{ la suite } z = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \, z_i,$  on obtient donc

(5) 
$$|z| > 0$$
 et  $\beta_n = 0$  pour  $n = 1, 2, ..., N$ .

Il est ainsi établi qu'il existe pour tout N naturel en élément  $z = \{\beta_n\}$  de G ayant les propriétés (5).

Définissons à présent par induction une suite  $\{y_i\}$ , d'éléments de G où  $y_i = \{\eta_n^i\}$ , en choisissant arbitrairement comme  $y_1$  un élément de G tel que  $|y_1| = 1$  et comme  $y_i$ , où i = 1, 2, ..., un élément de G tel que l'on ait

(6) 
$$|y_i| = 1$$
 et  $\eta_n^i = 0$  pour  $n = 1, 2, ..., N_{i-1}$ 

le nombre  $N_{i-1}$  étant le plus petit de ceux qui satisfon à l'inégalité

(7) 
$$|\eta_n^{i-1}| < \frac{1}{3^{i-1}}$$
 pour tout  $n \ge N_{i-1}$ .

L'existence d'une telle suite  $\{y_i\}$  résulte aussitôt de la prémisse qui vient d'être établie.

Soit  $G_0$  l'ensemble composé de tous les polynômes de la forme  $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i$  où r=1,2,... et de leurs limites.  $G_0$  est évidemment un ensemble linéaire et fermé.

Ceci dit, considérons une suite bornée quelconque  $x = \{\xi_i\}$  et posons

(8) 
$$\eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_n^i \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \dots$$

Nous allons montrer que

(9) 
$$\frac{1}{6}\|x\| \leqslant \text{borne } \sup_{1 \leqslant n < \infty} |\eta_n| \leqslant \frac{3}{2}\|x\|.$$

En effet, étant donné un indice n, il existe en vertu de (6) un  $m_i$  naturel tel que

(10) 
$$|\eta_{m_i}^i| = 1$$
 pour  $i = 1, 2, ...,$ 

d'où par définition de  $N_i$ 

$$(11) N_{i-1} \leq m_i < N_i$$

et par conséquent  $\lim_{i\to\infty}N_i=\infty$ ; il existe donc un k naturel tel que l'on a pour l'indice n en question

$$(12) N_{k-1} \leqslant n < N_k,$$

où  $N_0 = 1$ .

Pour tout i > k on a par conséquent selon (11)  $N_k \le N_{i-1}$ , d'où, selon (12),  $n < N_{i-1}$ . On en conclut en vertu de (6) que  $\eta_n^i = 0$  pour tout i > k, donc d'après (8) que

(13) 
$$\eta_n = \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_n^i.$$

Pour tout i < k on a en même temps selon (11)  $N_i \le N_{k-1}$ , d'où selon (12)  $N_i \le n$ , donc d'après (7)  $|\eta_n^i| < 1/3^i$ . Comme  $|\eta_n^k| \le 1$  et  $|\xi_i| \le ||x||$  pour tout i, il en résulte en vertu de (13) que l'on a d'une part la relation

$$|\eta_n| \leqslant ||x|| \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{3^i} + ||x|| \leqslant \frac{3}{2} ||x||,$$

ďoù

et d'autre part, pour tout k satisfaisant à (12), la relation

(15) 
$$|\eta_n| \geqslant |\xi_k| \cdot |\eta_n^k| - ||x|| \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{3^i} \geqslant |\xi_k| \cdot |\eta_n^k| - \frac{1}{2} ||x||.$$

Or, il existe un k tel que  $|\xi_k| \ge \frac{2}{3} ||x||$ , donc conformément à (10), que  $|\eta_{m_k}^k| = 1$ . Par conséquent, la relation (15) étant déduite pour l'indice n donné arbitrairement, on en tire pour  $n = m_k$ :  $|\eta_n| \ge \frac{2}{3} ||x|| - \frac{1}{2} ||x|| = \frac{1}{6} ||x||$ ,

d'où borne  $\sup_{1 \le n < \infty} |\eta_n| \ge \frac{1}{6} ||x||$ . En rapprochant cette inégalité de l'inégalité (14), nous voyons que la formule (9) se trouve ainsi établie.

Faisons à présent correspondre à tout  $x = \{\xi_i\}$  la suite  $y = \{\eta_n\}$ , définie par l'égalité (8). En vertu de (9) la suite y est bornée et on a, en posant y = U(x),

$$(16) \qquad \qquad \frac{1}{6}|x| \leqslant |U(x)| \leqslant \frac{3}{2}|x|,$$

de sorte que l'opération U(x) est linéaire.

D'autre part, pour  $x_i = \{\xi_n^i\}$ , où

$$\xi_n^i = \begin{cases} 1 & \text{pour} & i = n, \\ 0 & \text{pour} & i \neq n, \end{cases}$$

on a par définition  $y_i = U(x_i)$  pour i = 1, 2, ... Par conséquent pour  $x = \{\xi_i\} \subset (c_0)$  on a  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i$  d'où, par suite de la continuité de

l'opération U(x), il vient  $y = U(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i U(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i$ , donc, cette dernière série étant convergente, on obtient  $y \subset G_0$ .

Réciproquement, soit  $y \subset G_0$ . Par définition de  $G_0$  on a donc  $y = \lim_{n \to \infty} s_n$  où  $s_n = \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_i^n y_i$ ; pour  $t_n = \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_i^n x_i$  on a par conséquent  $t_n \subset (c_0)$  et  $U(t_n) = s_n$ . Or, la relation (16) donne  $\frac{1}{6}|t_p - t_q| \le |U(t_p - t_q)| = |s_p - s_q|$ ; l'égalité  $\lim_{\substack{p \to \infty \\ q \to \infty}} |s_p - s_q| = 0$  entraı̂ne donc  $\lim_{\substack{p \to \infty \\ q \to \infty}} |t_p - t_q| = 0$ . Ainsi la suite  $\{t_n\}$  est convergente. En posant  $x = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \to \infty}} t_n$ , on a donc  $x \subset (c_0)$  et U(x) = y, de sorte que l'opération U(x) est biunivoque et transforme  $(c_0)$  en  $G_0$  tout entier.

Les espaces  $(c_0)$  et  $G_0$  sont donc isomorphes et comme  $G_0 \subset G$ , on en conclut que  $\dim_l(c_0) \leq \dim_l G$ , ce qui entraı̂ne par suite des isomorphies entre G et E et entre  $(c_0)$  et (c) que  $\dim_l(c) \leq \dim_l E$ , contrairement à l'hypothèse (3). Le nombre de dimensions de E est par conséquent fini, c.q.f.d.

Pour  $(l^{(p)})$  où  $p \ge 1$  la démonstration est analogue.

# § 3. Dimension linéaire des espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ où p > 1 (1)

THÉORÈME 2. Toute suite de fonctions  $\{x_i(t)\}$  appartenant à  $(L^{(p)})$ , faiblement convergente vers 0, contient une suite partielle  $\{x_{ik}(t)\}$  telle que l'on a

(17) 
$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| = \begin{cases} O(n^{1/p}) & pour & 1$$

<sup>(1)</sup> Les théorèmes de ce § ont été trouvés en collaboration avec M. S. Mazur.

Chapitre XII. Dimension linéaire

Démonstration. Nous allons nous appuyer sur l'inégalité suivante pour p > 1:

(18) 
$$|a+b|^p \leq |a|^p + p|a|^{p-1}b \cdot \text{sign } a + A|b|^p + B\sum_{j=2}^{E(p)} |a|^{p-j}|b|^j(^1),$$

où a et b sont des nombres réels quelconques, A et B des constantes qui ne dépendent que de p et E(p) désigne l'entier de p. Par conséquent le dernier sommande disparait, lorsque  $p \le 2$ .

Définissons la suite  $\{x_{i_k}\}$  par induction, en posant  $i_1 = 1$  et en désignant par  $i_n$  où n > 1 un nombre naturel arbitraire satisfaisant à l'inégalité

(19) 
$$p \left| \int_{0}^{1} |s_{n-1}(t)|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} s_{n-1}(t) \cdot x_{i_{n}}(t) dt \right| \leq 1,$$

où  $s_{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} x_{i_k}(t)$ . Un tel  $i_n$  existe, puisque par l'hypothèse la suite  $\{x_i(t)\}$  converge faiblement vers 0 et  $|s_{n-1}(t)|^{p-1} \subset (L^{(q)})$  où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . L'inégalité (18) donne pour  $a = s_{n-1}(t)$  et  $b = x_{i_n}(t)$  par intégration:

(20) 
$$\int_{0}^{1} |s_{n}|^{p} dt \leq \int_{0}^{1} |s_{n-1}|^{p} dt + p \int_{0}^{1} |s_{n-1}|^{p-1} \cdot \operatorname{sign} s_{n-1} x_{i_{n}} dt + A \int_{0}^{1} |x_{i_{n}}|^{p} dt + B \sum_{j=2}^{E(p)} \int_{0}^{1} |s_{n-1}|^{p-j} |x_{i_{n}}|^{j} dt.$$

La convergence faible de la suite  $\{x_n(t)\}$  implique en vertu du théorème 1 (Chapitre IX, § 1), p. 128, que la suite des nombres  $\{\|x_n\|\}$  est bornée et on peut admettre sans restreindre la généralité du raisonnement que

(21) 
$$||x_n|| \le 1$$
 pour  $n = 1, 2, ...$ 

Or, dans le cas où p > 2 on a selon (21) en vertu de l'inégalité de Riesz (cf. Introduction, § 2, p. 24) pour  $2 \le j \le p$ :

$$\int_{0}^{1} |s_{n-1}|^{p-j} |x_{i_n}|^j dt \le \left[ \int_{0}^{1} |s_{n-1}|^p dt \right]^{(p-j)/p} \le 1 + \left[ \int_{0}^{1} |s_{n-1}|^p dt \right]^{(p-2)/p}$$

d'où, selon (19) et (20),  $||s_n||^p \le ||s_{n-1}||^p + 1 + A + Bp(1 + ||s_{n-1}||^{p-2})$ , ce qui conduit par itération à la forme

(22) 
$$||s_n||^p \leqslant C \cdot n + D \sum_{k=1}^{n-1} ||s_k||^{p-2}$$

où 
$$C = 1 + A + Bp$$
 et  $D = Bp$ .

Soit M = C + D + 2. Nous allons montrer par induction que

(23) 
$$||s_n|| \le M \cdot n^{1/2}$$
 pour  $n = 1, 2, ...$ 

En effet, par définition de  $s_n$  et d'après (21) on a  $||s_1|| \le 1$  et, en admettant que l'inégalité (23) est vraie pour les indices inférieurs à un n donné, on a selon (22)  $||s_n||^p \le D \cdot M^{p-2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{(p-2)/2} + C \cdot n \le D \cdot M^{p-2} \cdot n^{p/2} + C \cdot n \le M^p n^{p/2} (D \cdot M^{-2} + n^{1-p/2} C \cdot M^{-p})$ , ce qui entraı̂ne l'inégalité (23), puisque, comme on vérifie facilement, la somme en parenthèses est < 1 pour p > 2.

En vertu de (23), l'égalité  $||s_n|| = O(n^{1/2})$  pour p > 2 est ainsi établie. Passons au cas où  $1 . Par définition de <math>s_n$  on tire de (20) et (21)  $\int_0^1 |s_n|^p dt \le \int_0^1 |s_{n-1}|^p dt + 1 + A + B, \text{ d'où } ||s_n||^p \le ||s_{n-1}||^p + C \text{ où } C = 1 + A + B$  et par conséquent  $||s_n||^p \le ||s_1||^p + C(n-1) \le C \cdot n$  donc, en posant  $M^p = C$  nous obtenons  $||s_n|| \le M \cdot n^{1/p}$ , de sorte que dans le cas en question l'égalité  $||s_n|| = O(n^{1/p})$  se trouve aussi établie, c.q.f.d.

Remarque. Le théorème précédent cesse d'être vrai, quel que soit p > 1, si on remplace dans les relations (17) le signe O par o.

En effet, pour  $p \ge 2$  soit  $x_i(t) = \sin 2\pi it$ . Comme on a  $\lim_{t \to \infty} \int_0^1 \alpha(t) \sin 2\pi it \, dt = 0$  pour toute fonction intégrable  $\alpha(t)$ , la suite  $\{x_i(t)\}$  est dans  $(L^{(p)})$  faiblement convergente dans l'intervalle [0, 1]. En posant  $s_n(t) = \sum_{k=1}^n x_{i_k}(t)$  où  $\{x_{i_k}(t)\}$  désigne une suite partielle arbitraire, on a donc

$$||s_n(t)|| = \sqrt[p]{\int\limits_0^1 |s_n(t)|^p dt} \ge \sqrt{\int\limits_0^1 s_n^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot n^{1/2},$$

ce qui prouve que O ne peut pas être remplacé par o.

Pour 1 , en posant

$$x_{i}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{i}{p}} & \text{pour} & \frac{1}{2^{i}} \leq t \leq \frac{1}{2^{i-1}}, \\ 0 & \text{pour} & 0 \leq t < \frac{1}{2^{i}} \text{ et } \frac{1}{2^{i-1}} < t \leq 1, \end{cases}$$

on a pour toute suite partielle  $\{x_{i_k}(t)\}$  l'égalité

$$||s_n|| = \sqrt[p]{\int\limits_0^1 |s_n(t)|^p dt} = \sqrt[p]{n},$$

qui montre l'impossibilité de remplacer O par o aussi dans ce dernier cas.

<sup>(1)</sup> Pour la démonstration de cette inégalité voir S. Banach et S. Saks [27], p. 52 [ce volume, p. 397].

Chapitre XII. Dimension linéaire

Théorème 3. Toute suite  $\{x_i\}$  d'éléments de  $(l^{(p)})$  où p>1, faiblement convergente vers 0, renferme une suite partielle  $\{x_{i_k}\}$  telle que

(24) 
$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| = O(n^{\frac{1}{p}}).$$

Démonstration. Soit  $x_i = \{\xi_r^i\}$ . La convergence faible de  $\{x_i\}$  vers 0 entraı̂ne (cf. p. 131), que

(25) 
$$\lim_{i \to \infty} \xi_r^i = 0 \quad \text{pour} \quad r = 1, 2, ...$$

et que

(26) 
$$||x_i|| \le M$$
 pour  $i = 1, 2, ...$ 

La définition recurrentielle de la suite  $\{x_{ik}\}$  est la suivante:  $x_{i_1} = x_1$  et  $x_i$  où n > 1 est un terme arbitraire de la suite  $\{x_i\}$  satisfaisant à l'inégalité

où  $\{\xi_j\} = s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x_{i_k}$  et N désigne un nombre naturel tel que

(28) 
$$\sum_{j=N}^{\infty} |\xi_j|^p \leqslant 1.$$

Un  $x_{i_n}$  ainsi défini existe en vertu de (25). On a par définition:

$$||s_n||^p = ||s_{n-1} + x_{i_n}||^p \le \sum_{j=1}^N |\xi_j - \xi_j^{i_n}|^p + \sum_{j=N}^\infty |\xi_j + \xi_j^{i_n}|^p,$$

d'où en vertu de (27) et de l'inégalité de Hölder

$$||s_n||^p \leqslant \sum_{j=1}^N |\xi_j|^p + 1 + \left[ \left( \sum_{j=N}^\infty |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{j=N}^\infty |\xi_j^{i_n}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p$$

et par conséquent selon (26) et (28)  $||s_n||^p \le ||s_{n-1}||^p + 1 + (1+M)^p$ =  $||s_{n-1}||^p + C$  où  $C = 1 + (1+M)^p$ . Il en résulte que  $||s_n||^p \le C \cdot n$ , d'où par définition de  $s_n$  l'égalité (24), q.f.d.

Remarque. Le théorème 3 qui précède cesse d'être vrai pour tout p > 1, si on remplace O par o dans la formule (24).

En effet, il suffit de poser

$$\xi_r^i = \begin{cases} 1 & \text{pour} & i = r, \\ 0 & \text{pour} & i \neq r, \end{cases}$$

pour avoir  $\left\|\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\right\| = n^{1/p}$ , quelle que soit la suite partielle  $\{x_{i_k}\}$ .

Nous allons déduire des théorèmes 2 et 3, qui viennent d'être établis,

plusieurs relations d'une part entre les dimensions linéaires des espaces  $(L^{(p)})$  et  $(L^{(q)})$ , d'autre part entre celles des espaces  $(l^{(p)})$  et  $(l^{(q)})$  et enfin entre les dimensions linéaires des espaces  $(L^{(p)})$  et celles des espaces  $(l^{(q)})$ , en posant partout p>1< q.

Lemme. Si  $\dim_l(L^{(p)}) \leq \dim_l(L^{(q)})$  où p > 1 < q, alors on a soit  $q \leq p \leq 2$ , soit  $2 \leq p \leq q$ .

Démonstration. Il existe par hypothèse une opération linéaire y = U(x), où  $x \subset (L^{(p)})$ , qui transforme  $(L^{(p)})$  en sous-espace fermé G de  $(L^{(q)})$  d'une façon biunivoque et continue. Etant donnée une suite  $\{x_n\}$  où  $x_n \subset (L^{(p)})$ , faiblement convergente vers  $\Theta$ , il en est donc de même de la suite  $\{y_n\}$  où  $y_n = U(x_n)$ . En vertu du théorème 2, p. 179, il existe par conséquent une suite partielle  $\{y_n\}$  telle que

(29) 
$$\| \sum_{k=1}^{n} y_{i_k} \| = O(n^{\varphi(q)}) \quad \text{où} \quad \varphi(q) = \begin{cases} 1/q \text{ pour } 1 < q \leq 2, \\ 1/2 \text{ pour } q \geq 2. \end{cases}$$

L'opération inverse  $x = U^{-1}(y)$  étant continue, il existe un M > 0 tel que  $||x|| \le M ||y||$  pour tout  $y \subset G$ , d'où  $||\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}|| \le M ||\sum_{k=1}^{n} y_{i_k}||$  et par conséquent, selon (29),  $||\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}|| = O(n^{\varphi(q)})$ , donc,  $\{x_i\}$  étant une suite arbitraire faiblement convergente vers  $\Theta$ , on conclut de (29) que

$$\varphi\left(p\right)\leqslant\varphi\left(q\right).$$

Or, comme les espaces des fonctionnelles linéaires définies dans  $(L^{(p)})$  et  $(L^{(p)})$  sont (cf. Chapitre XI, § 6, p. 166, 2°) isométriques respectivement avec  $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$  et  $(L^{\left(\frac{q}{q-1}\right)})$ , nous pouvons admettre que opération conjuguée  $X=\bar{U}(Y)$  transforme  $(L^{\left(\frac{q}{q-1}\right)})$  en  $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$  et il résulte du théorème 3 (Chapitre X, § 1), p. 140, qu'elle a pour contredomaine l'espace  $(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$  tout entier. En vertu du théorème 10 (Chapitre X, § 1), p. 142, il existe donc un m>0 tel qu'à chaque  $X\subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)})$  vienne correspondre un  $Y\subset (L^{\left(\frac{q}{q-1}\right)})$  de façon qu'on ait  $X=\bar{U}(Y)$  et  $|Y|\leqslant m|X|$ .

Ceci dit, soient  $\{X_n\}$  une suite quelconque d'éléments de  $(L^{\frac{r}{p-1}})$ , faiblement convergente vers 0 et  $\{Y_n\}$  la suite assujettie aux conditions  $X_n = \bar{U}(Y_n)$  et  $|Y_n| \le m|X_n|$  pour tout n naturel. La suite des normes  $\{|Y_n|\}$  étant donc bornée, il existe (voir Chapitre VIII, § 7, p. 126), une suite partielle  $\{Y_{n_i}\}$  faiblement convergente. Si on en désigne la limite par  $Y_0$ , il vient  $\bar{U}(Y_0) = 0$ , puisque la suite  $\{X_{n_i}\}$  converge faiblement vers 0. On a en conséquence  $X_{n_i} = \bar{U}(Y_{n_i} - Y_0)$  et, en outre, la suite  $\{Y_{n_i} - Y_0\}$  converge faiblement vers 0. En posant  $Y_i = Y_{n_i} - Y_0$  pour i = 1, 2, ..., on

Chapitre XII. Dimension linéaire

peut donc en extraire en vertu du théorème 2, p. 179, une suite partielle  $\{Y_{ik}\}$  telle que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} Y_{ik}\right| = O\left(n^{\varphi\left(\frac{q}{q-1}\right)}\right)$$

d'où, en posant  $X_{i_k} = \bar{U}(Y_{i_k})$ , on obtient  $|X_{i_k}| \leq |\bar{U}| \cdot |Y_{i_k}|$  et

(33) 
$$\left| \sum_{k=1}^{n} X_{i_k} \right| = O(n^{\varphi(\frac{q}{q-1})}).$$

La suite  $\{X_{i_k}\}$  étant par définition extraite de  $\{X_n\}$ , on conclut de (32) et (33) en vertu de la remarque p. 181, que

(34) 
$$\varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) \leqslant \varphi\left(\frac{q}{q-1}\right),$$

d'où selon (30) et par définition de la fonction  $\varphi$  on tire sans peine les inégalités qu'il fallait démontrer.

On déduit facilement de ce lemme les théorèmes suivants.

Théorème 4. Si  $\dim_{\mathbb{I}}(L^{(p)}) = \dim_{\mathbb{I}}(L^{(q)})$  où p > 1 < q, on a p = q.

Théorème 5. Si  $1 , les espaces <math>(L^{(p)})$  et  $(L^{(q)})$  sont des dimensions linéaires incomparables.

Théorème 6. Si  $1 , on <math>a \dim_l(L^2) < \dim_l(L^{(p)})$ .

Démonstration. Soit pour  $x(t) \subset (L^2)$ :

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos 2^i t + b_i \sin 2^i t) -$$

où  $a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos it \, dt$  et  $b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin it \, dt$ , quel que soit  $i = 0, 1, 2, \dots$ 

Comme  $\sum_{i=0}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) = \int_0^{2\pi} x^2(t) dt$ , il existe(1) une constante M > 0 (ne dépendant que de p) telle que

$$\left[\int_{0}^{2\pi} |y(t)|^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \leq M \left[\sum_{i=0}^{\infty} (a_{i}^{2} + b_{i}^{2})\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En posant y = U(x), on a donc  $y \subset (L^{(p)})$  et l'inégalité précédente peut être écrite dans la forme

$$\|y\| \leq M \|x\|,$$

de sorte que l'opération U(x) est linéaire.

Il existe (1) d'autre part une constante K telle que

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant K \int_{0}^{2\pi} |y(t)| dt,$$

d'où en vertu de l'inégalité de Riesz (v. Introduction, § 2, p. 24):

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant K \sqrt[p]{2\pi} \left[\int_{0}^{2\pi} |y(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

donc  $||x|| \le C ||y||$  où  $C = K \sqrt[p]{2\pi}$ , de sorte que U(x) admet l'opération inverse continue.

On a par conséquent la relation

$$\dim_I(L^2) \leqslant \dim_I(L^{(p)})$$

où le signe d'égalité est exclu (puisqu'on aurait alors en vertu du théorème 4, p. 184, l'égalité p=2, contrairement à l'hypothèse), c.q.f.d.

Il est à noter que le problème suivant reste ouvert: est-il vrai que pour  $q , ainsi que pour <math>2 on a toujours <math>\dim_I(L^{(p)}) < \dim_I(L^{(q)})$ ? Pour les espaces  $(l^{(p)})$  et  $(l^{(q)})$  on a le

Théorème 7. Les espaces  $(l^{(p)})$  et  $(l^{(q)})$  où 1 1 sont des dimensions linéaires incomparables.

Démonstration. En posant  $\dim_l(l^{(p)}) \leq \dim_l(l^{(q)})$  et en procédant comme dans la démonstration du lemme, p. 183, on obtient en effet les inégalités (qui correspondent aux formules (30) et (34)):

$$\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{q}$$
 et  $\frac{p-1}{p} \leqslant \frac{q-1}{q}$ ,

d'où p = q, contrairement à l'hypothèse.

Passons aux relations de dimensions linéaires entre  $(L^{(p)})$  et  $(l^{(q)})$ .

Théorème 8. Si  $\dim_l(L^{(p)}) \leq \dim_l(l^{(q)})$  où p>1< q, on a p=q=2.

Démonstration. Par le même procédé on obtient (au lieu de (30) et (34)):

$$\varphi(p) \leqslant \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right) \leqslant \frac{q-1}{q},$$

οù

(35) 
$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pour} \quad n \leq 2, \\ \frac{1}{2} & \text{pour} \quad n \geq 2, \end{cases}$$

Il en résulte aussitôt que p = q = 2, c.q.f.d.

<sup>(1)</sup> En vertu d'un théorème de M. A. Zygmund (voir Sur les séries trigonométriques lacunaires, Proceedings of the London Mathematical Society 5 (1930), p. 138-145).

<sup>(1)</sup> Voir S. Banach [28], p. 212 [cette édition, vol. I, p. 191].



Le théorème 8 qui précède entraıne en vertu du théorème 1 (Chapitre XI, § 2), p. 154, le

Corollaire. Pour que  $\dim_l(L^{(p)}) = \dim_l(l^{(q)})$ , il faut et il suffit que p=q=2.

Théorème 9. Si  $1 , on a <math>\dim_l(L^{(p)}) > \dim_l(l^{(p)})$ .

Démonstration. En effet, si on avait par contre  $\dim_l(L^{(p)}) \leq \dim_l(l^{(p)})$ , on aurait en vertu du théorème 8, p. 185, en y posant p=q, l'égalité p=2, contrairement à l'hypothèse.

Il reste donc à montrer que les espaces en question sont de dimensions linéaires comparables. Posons à ce but

$$y_i(t) = \begin{cases} 2^{\frac{i}{p}} & \text{pour} & \frac{1}{2^i} \le t \le \frac{1}{2^{i-1}}, \\ 0 & \text{pour} & 0 \le t < \frac{1}{2^i} \text{ et } \frac{1}{2^{i-1}} < t \le 1, \end{cases}$$

d'où  $\int_0^1 |y_i(t)|^p dt = 1$ , donc  $y_i(t) \subset (L^{(p)})$  pour i = 1, 2, ...; soit pour tout  $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$ 

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i y_i(t),$$

d'où  $\int_0^1 |y(t)|^p dt = \sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^p$ . En posant par conséquent y = U(x), on obtient ||y|| = ||x||, ce qui prouve que l'opération U(x) est linéaire et admet l'opération inverse continue. Or, elle transforme par isomorphie  $(l^{(p)})$  en sous-espace de  $(L^{(p)})$ .

THÉORÈME 10. Pour 1 < q < p < 2, de même que pour  $2 , les espaces <math>(L^{(p)})$  et  $(l^{(q)})$  sont des dimensions linéaires incomparables.

Démonstration. En supposant que  $\dim_l(L^{(p)}) \geqslant \dim_l(l^{(q)})$ , on aboutit par le raisonnement employé dans la démonstration du lemme, p. 183, aux inégalités (analogues à (30) et (34)):

$$\frac{1}{q} \le \varphi(p)$$
 et  $\frac{q-1}{q} \le \varphi\left(\frac{p}{p-1}\right)$ ,

où la fonction  $\varphi$  est définie par la formule (35), p. 185. On en déduit aussitôt qu'on a soit  $p \le q \le 2$ , soit  $2 \le q \le p$ , contrairement à l'hypothèse.

La question suivante reste cependant non résolue: est-il vrai que p < q < 2, de même que 2 < q < p, entraîne l'inégalité  $\dim_l(L^{(p)}) > \dim_l(l^{(q)})$ ?

### ANNEXE

# Convergence faible dans les espaces du type (B)

Nous distinguons dans les espaces du type (B) deux notions de convergence faible, à savoir: la convergence faible des fonctionnelles linéaires et celle des éléments (1). Les deux notions sont évidemment différentes. Nous allons ajouter ici quelques théorèmes relatifs à l'étude de ces notions.

# § 1. Les dérivés faibles des ensembles de fonctionnelles linéaires

Etant donné un espace du type (B) séparable, soit  $\Gamma$  un ensemble quelconque de fonctionnelles linéaires définies dans E.

Appelons une fonctionnelle linéaire X point d'accumulation faible de l'ensemble  $\Gamma$ , lorsqu'il existe une suite de fonctionnelles  $\{X_k\}$ , où  $X_k \neq X$  et  $X_k \subset \Gamma$  pour tout k = 1, 2, ..., qui converge faiblement vers la fonctionnelle X.

L'ensemble de tous les points d'accumulation faible de l'ensemble  $\Gamma$  sera dit le dérivé faible d'ordre 1 de  $\Gamma$ , et le dérivé faible du dérivé faible d'ordre n-1 de  $\Gamma$  s'appellera dérivé faible d'ordre n de  $\Gamma$ . Les dérivés faibles successifs de  $\Gamma$  seront désignés par  $\Gamma_{(1)}, \Gamma_{(2)}, \dots, \Gamma_{(n)}, \dots$ 

Si  $\Gamma$  est un ensemble linéaire, on a évidemment

$$\Gamma \subset \Gamma_{(1)} \subset \Gamma_{(2)} \subset \ldots \subset \Gamma_{(n)} \subset \Gamma_{(n+1)} \subset \ldots$$

Il est facile de donner un exemple d'ensemble linéaire  $\Gamma$  qui soit fermé, sans être faiblement fermé.

Considérons, en effet, comme  $\Gamma$  l'ensemble des fonctionnelles linéaires définies dans l'espace  $(c_0)$  (2) de la forme

(1) 
$$X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \, \zeta_i \, (^3),$$

où 
$$x = \{\xi_i\} \subset (c_0)$$
 et  $C_1 = \sum_{i=2}^{\alpha_1} C_i$ .

<sup>(1)</sup> Cf. Chapitre VIII, § 4, et Chapitre IX, § 1.

<sup>(2)</sup> C.-à-d. dans l'espace des suites de nombres réels convergentes vers 0 (cf. Chapitre XI, 6, p. 166).

<sup>(3)</sup> Cf. Chapitre IV, § 4, p. 74.

On constate aisément que l'ensemble  $\Gamma$  ainsi défini est linéaire, fermé et qu'il ne contient pas la fonctionnelle de la forme (1) où  $C_i = 1$  et  $C_i = 0$  pour i = 2, 3, ... Or, cette dernière fonctionnelle étant (voir Remarques au Chapitre VIII, § 6, p. 124) la limite faible de la suite  $\{X_k\}$  des fonctionnelles de la forme (1) où

$$C_i = \begin{cases} 1 & \text{pour} & i = 1 \text{ ou } i = k, \\ 0 & \text{pour} & i \neq 1 \text{ et } i \neq k, \end{cases}$$

l'ensemble l' n'est pas saiblement sermé.

THÉORÈME 1. Il existe pour tout n naturel un ensemble linéaire de fonctionnelles linéaires définies dans l'espace  $(c_0)$  et dont le dérivé faible d'ordre n n'est pas faiblement fermé (1).

Démonstration. Toute fonctionnelle linéaire X définie dans  $(c_0)$  étant de la forme (1) où  $x=\{\xi_i\}\subset (c_0)$  et  $\sum_{i=1}^{\infty}|C_i|=|X|$ , soient  $\Delta_1$  l'ensemble de celles où l'on a  $C_{2i}=0$  et  $\Delta_2$  l'ensemble de celles où  $C_{2i-1}=0$  pour  $i=1,2,\ldots$ 

Faisons correspondre d'une façon biunivoque à tout couple r,s de nombres naturels un nombre pair N(r,s) et désignons par  $Z_{r,s}$  la fonctionnelle linéaire définie dans  $(c_0)$  de la forme  $Z_{r,s}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i$  où  $x = \{\xi_i\} \subset (c_0)$  et telle que

(2) 
$$C_i = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = N(r, s), \\ 0 & \text{pour } i \neq N(r, s). \end{cases}$$

Considérons un ensemble linéaire quelconque G de fonctionnelles linéaires définies dans  $(c_0)$ . Soit H l'ensemble de toutes les fonctionnelles de la forme (1) où  $C_{2i} = 0$  pour i = 1, 2, ... et telles que la fonctionnelle  $\sum_{i=1}^{\infty} C_{2i-1} \xi_i$  appartienne à G. L'ensemble H ainsi défini est évidemment linéaire et on a  $H \subset \Delta_1$ . Comme sous-espace de (l), l'ensemble  $\Delta_1$  est séparable. H contient donc une suite de fonctionnelles  $\{Y_r\}$  dense dans l'ensemble des fonctionnelles à normes  $\leq 1$ , appartenant à H, et telle que

(3) 
$$|Y_r| \le 1$$
 pour  $r = 1, 2, ...$ 

Posons pour r et s naturels:

$$(4) X_{r,s} = Y_r + rZ_{r,s}$$

et désignons par  $\Gamma$  l'ensemble linéaire des fonctionnelles X de la forme

(5) 
$$X = \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} a_{r,s} X_{r,s} = \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} Y_r \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s} + \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} r a_{r,s} Z_{r,s},$$

où il n'y ait tout au plus qu'un nombre fini de  $a_{r,s}$  non nuls.

En raison de (4) et (5) on a donc par définition des ensembles  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ 

(6) 
$$\left\| \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} a_{r,s} X_{r,s} \right\| \ge \left\| \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} r a_{r,s} Z_{r,s} \right\| = \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} |r a_{r,s}|.$$

Soit à présent  $\{X_k\}$  où  $X_k \subset \Gamma$  pour k = 1, 2, ... une suite faiblement convergente vers X. En vertu de (5) on peut poser

(7) 
$$X_{k} = \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} a_{r,s}^{(k)} X_{r,s} = X'_{k} + X''_{k},$$

où

(8) 
$$X'_{k} = \sum_{r=1}^{\infty} Y_{r} \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s}^{(k)} \quad \text{et} \quad X''_{k} = \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} r a_{r,s}^{(k)} Z_{r,s}.$$

On a évidemment  $X'_k \subset 1_1$  et  $X''_k \subset \Delta_2$ , quel que soit k, de sorte que les suites  $\{X'_k\}$  et  $\{X''_k\}$  convergent faiblement vers certaines fonctionnelles  $X' \subset \Delta_1$  et  $X'' \subset \Delta_2$ ; par conséquent X = X' + X''.

H' désignant, comme d'habitude, l'ensemble dérivé de H au sens ordinaire, nous allons montrer d'abord que

$$(Y)$$
  $(Y)$   $(Y)$   $(Y)$ 

En effet, il existe par suite de la convergence faible de la suite  $\{X_k\}$  vers X, un nombre M > 0 tel qu'on a pour  $k = 1, 2, ..., |X_k| \le M$ , d'où selon (6)-(8)  $\sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} |ra_{r,s}^{(k)}| \le M$ ; en posant donc  $b_r^{(k)} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{r,s}^{(k)}$ , on peut écrire

(10) 
$$\sum_{r=1}^{\infty} |rb_r^{(k)}| \leq M \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, ...$$

Il existe par conséquent une suite partielle  $\{k_j\}$  telle que la limite  $b_r = \lim_{j \to \infty} b_r^{(k_j)}$  existe pour tout r = 1, 2, ...

On a donc en vertu de (10)

$$(11) \sum_{r=1}^{\infty} r|b_r| \leqslant M.$$

<sup>(1)</sup> Le premier exemple d'un ensemble linéaire de fonctionnelles linéaires dont le dérivé faible n'est pas faiblement fermé a été donné par M. S. Mazurkiewicz (Sur la dérivée faible d'un ensemble de fonctionnelles linéaires, Studia Mathematica 2 (1930), p. 68-71).

Pour tout m naturel on a en conséquence

$$\sum_{r=1}^{\infty} |b_r^{(k_j)} - b_r| \leq \sum_{r=1}^{m-1} |b_r^{(k_j)} - b_r| + \sum_{r=m}^{\infty} |b_r^{(k_j)}| + \sum_{r=m}^{\infty} |b_r|,$$

ce qui donne selon (11) et par définition de b, l'inégalité

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\sum_{r=1}^{\infty}|b_r^{(k_j)}-b_r|\leqslant 2M/m,$$

d'où, m étant arbitraire,

$$\lim_{j \to \infty} \sum_{r=1}^{\infty} |b_r^{(k_j)} - b_r| = 0.$$

Remarquons que la série  $\sum_{r=1}^{\infty} b_r Y_r$  est d'après (3) et (11) convergente et l'égalité qui précède implique d'après (8) que X' en est la somme. Comme  $Y_r \subset H$  pour tout r naturel et H est un ensemble linéaire, on a donc  $X' \subset H'$ .

Il est ainsi démontré que pour  $X = X' + X'' \subset \Gamma_{(1)}$ , où  $X' \subset \Delta_1$  et  $X'' \subset \Delta_2$ , on a  $X' \subset H'$ . La formule (9) se trouve donc établie.

D'autre part, on constate facilement que la suite  $\{Z_{r,s}\}$  tend faiblement vers  $\Theta$  avec  $s \to \infty$ ; par conséquent en vertu de (4), la suite  $\{X_{r,s}\}$  tend faiblement vers  $Y_r$ , lorsque  $s \to \infty$ . On a donc

(12) 
$$Y_r \subset \Gamma_{(1)} \quad \text{pour} \quad r = 1, 2, \dots$$

Soit maintenant  $\{X_k\}$  où  $X_k \subset \Gamma_{(1)}$  pour k=1,2,... une suite faiblement convergente vers  $X \subset \Delta_1 \Gamma_{(2)}(^1)$ . On a évidemment  $X_k = X_k' + X_k''$ , où  $X_k' \subset H'$  et  $X_k'' \subset \Delta_2$ . On aperçoit aisément que la suite  $\{X_k'\}$  converge faiblement vers X, d'où  $X \subset H_{(1)}$ . Réciproquement, il existe pour tout  $X \subset H_{(1)}$  une suite  $\{X_k\}$  de fonctionnelles appartenant à H et faiblement convergente vers X. Nous pouvons admettre sans restreindre la généralité que  $|X_k| \leq 1$  quel que soit k=1,2,... Par définition de la suite  $\{Y_r\}$  il existe pour tout k un indice  $r_k$  tel que  $|X_k-Y_{r_k}| \leq 1/k$ , de sorte que la suite  $\{Y_{r_k}\}$  est aussi faiblement convergente vers X. Il en résulte selon (12) que  $X \subset \Gamma_{(2)}$ , d'où  $X \subset \Delta_1 \Gamma_{(2)}$  (puisque  $H_{(1)} \subset \Delta_1$  par définition de  $\Delta_1$ ). Donc

(13) 
$$\Delta_1 \Gamma_{(2)} = H_{(1)}.$$

En procédant ainsi de suite, on montrera par induction que l'on a d'une façon générale

(14) 
$$\Delta_1 \Gamma_{(n+1)} = H_{(n)}$$
 pour tout  $n = 1, 2, ...$ 

Ceci établi, revenons à l'ensemble donné G. Si l'on admet que le dérivé G' de G n'est pas faiblement fermé, il en sera évidemment de même du dérivé H' de H, et, en vertu de (9) et (13), il en sera encore de même du dérivé faible  $\Gamma_{(1)}$  de  $\Gamma$ . D'une façon analogue, en admettant que le dérivé faible  $G_{(n-1)}$  d'ordre n-1 de G ne soit pas faiblement fermé, il en sera évidemment de même du dérivé faible  $H_{(n)}$  d'ordre n de H, donc, en vertu de (14), aussi du dérivé faible  $\Gamma_{(n+1)}$  d'ordre n+1 de  $\Gamma$ , c.q.f.d.

Remarque. On peut définir les dérivés faibles  $\Gamma_{(\xi)}$  d'ordre transfini  $\xi$  de  $\Gamma$  pour les nombres transfinis  $\xi$  de deuxième classe, en posant  $\Gamma_{(\xi)} = \sum_{\eta < \xi} \Gamma_{(\eta)}$  ou  $\Gamma_{(\xi)} = (\Gamma_{(\xi-1)})_{(1)}$ , suivant que  $\xi$  est un nombre-limite ou non

On peut établir alors par induction le théorème suivant, analogue au théorème 1;

Il existe pour tout nombre transfini  $\xi$  de deuxième classe un ensemble linéaire de fonctionnelles linéaires définies dans l'espace  $(c_0)$  et dont le dérivé faible d'ordre  $\xi$  n'est pas faiblement fermé (1).

On peut cependant montrer que, E étant un espace du type (B) séparable et  $\Gamma$  un ensemble arbitraire de fonctionnelles linéaires définies dans E, il existe toujours un tel nombre  $\xi$  fini ou transfini de deuxième classe que l'ensemble  $\Gamma_{(\xi)}$  est faiblement fermé. C'est une conséquence facile du théorème 4 (Chapitre VIII, § 5), p. 121.

Théorème 2. Soient E un espace du type (B) sèparable et  $\Gamma \subset \overline{E}(^2)$  un ensemble linéaire. Pour que  $\Gamma_{(1)} = \overline{E}$ , il faut et il suffit qu'il existe un nombre M>0 tel que  $\Gamma$  contienne pour tout  $x\subset E$  une fonctionnelle X satisfaisant aux conditions

$$|X| \leqslant M \quad et \quad |X(x)| = |x|.$$

Démonstration. Nécessité. Soit pour tout n naturel  $\Delta_n$  l'ensemble des fonctionnelles linéaires X définies dans E qui sont des limites faibles des suites  $\{X_k\}$  de fonctionnelles appartenant à  $\Gamma$  et vérifiant l'inégalité  $|X_k| \leq n$  pour  $k = 1, 2, \ldots$  On a donc en vertu du théorème 2 (Chapitre VIII, § 4),

p. 120, 
$$\Gamma_{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n$$
, d'où par l'hypothèse

(16) 
$$\ddot{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

Remarquons que tout  $\Delta_n$  est un ensemble fermé. Soit, en effet,  $\{X_j\}$  une suite de fonctionnelles appartenant à  $\Delta_n$  où  $\lim_{j\to\infty} |X_j-X|=0$ . Par définition

<sup>(1)</sup> Le symbole AB désigne d'une façon générale la partie commune des ensembles A et B.

<sup>(1)</sup> Voir S. Banach, Sur le dérivé faible des ensembles de fonctionnelles linéaires, Studia Mathematica IV (à paraître). [Ce travail n'a pas été publié.]

<sup>(2)</sup>  $\overline{E}$  désigne, comme auparavant, l'espace conjugué avec E, c. à-d. l'espace des fonctionnelles linéaires définies dans E.

193

de  $\Delta_n$  il existe donc pour tout j une suite  $\{X_k^i\}$  faiblement convergente vers  $X_i$ , où  $X_k^i \subset \Gamma$  et  $|X_k^i| \le n$  pour k = 1, 2, ... Etant donnée une suite  $\{x_r\}$ , dense dans E, les égalités  $\lim_{k\to\infty} X_k^i(x_r) = X_j(x_r)$  et  $\lim_{i\to\infty} X_j(x_r) = X(x_r)$ , qui se présentent quels que soient j et r, entraînent l'existence d'une suite  $\{X_{k_j}^i\}$  telle que  $\lim_{j\to\infty}X_{k_j}^i(x_r)=X(x_r)$  pour tout  $r=1,2,\ldots$  Comme  $|X_{k_j}^i|\leqslant n$ , il en résulte en vertu du théorème 2 (Chapitre VIII, § 4), p. 120, que la suite  $\{X_k^i\}$  converge faiblement vers X, d'où  $X \subset \Delta_n$ .

Ainsi, tout  $\Delta_n$  étant fermé et l'espace  $\bar{E}$  étant également du type (B), l'égalité (16) entraı̂ne l'existence d'un indice  $n_0$  tel que  $\Delta_{n_0}$  contient une sphère  $K \subset \bar{E}$ . Désignons par X' le centre et par  $\varrho$  le rayon de K.

Etant donné un élément  $x \subseteq E$ , il existe en vertu du théorème 3 (Chapitre IV, § 2), p. 64, une fonctionnelle  $X_0 \subset \overline{E}$  telle que

(17) 
$$X_0(x) = |x|$$
 et  $|X_0| = 1$ .

Posons

(18) 
$$\lambda = \frac{\varrho}{1 + |X'|} \quad \text{et} \quad X'' = \lambda X_0 + (1 - \lambda) X'.$$

On en tire facilement  $|X''-X'| \leq \varrho$ , d'où  $X'' \subset K \subset \Delta_{n_0}$ . Il existe par conséquent deux suites  $\{X'_k\}$  et  $\{X''_k\}$  de fonctionnelles appartenant à  $\Gamma$ et faiblement convergentes vers X' et X'' respectivement; on a donc en même temps

(19) 
$$|X'_k| \le n_0$$
 et  $|X''_k| \le n_0$  pour  $k = 1, 2, ...$ 

La suite  $\left\{\frac{1}{\lambda}X_{k}^{"}-\frac{1-\lambda}{\lambda}X_{k}^{'}\right\}$  appartient à  $\Gamma$  et d'après (18) tend faiblement vers  $X_0$ . D'après (17) il existe par conséquent un indice  $k_0$  tel que

(20) 
$$\frac{1}{\lambda} X_{k_0}^{\prime\prime}(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda} X_{k_0}^{\prime}(x) = \alpha \cdot |x| \quad \text{où} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 2.$$

En posant donc  $X = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\lambda} X_{k_0}^{"} - \frac{1-\lambda}{\lambda} X_{k_0}^{"} \right)$ , on obtient  $X \subset \Gamma$ , X(x)

= |x|, et, en vertu de (18)-(20),  $|X| \le M = \frac{2n_0}{2} (2+2|X'|+\varrho)$ , de sorte que M est indépendant de x. Ainsi la condition (15) se trouve en effet réalisée.

Suffisance. A désignant l'ensemble des fonctionnelles linéaires X appartenant à  $\Gamma$  et telles que  $|X| \le 1$ , il existe dans  $\Delta$  suivant le théorème 4 (Chapitre VIII, § 5), p. 121 (1), une suite de fonctionnelles linéaires  $\{X_i\}$  faiblement dense dans  $\Delta$ .

Posons pour tout  $x \subset E$ 

(21) 
$$y = {\eta_r}$$
 où  $\eta_r = X_r(x)$  pour  $r = 1, 2, ...$   
On a donc

$$(22) |\eta_r| \leqslant |X_r| \cdot |x| \leqslant |x|,$$

d'où  $y \subset (m)$ . En admettant pour y la norme adoptée dans (m), on obtient de (21) et (22)

$$(23) |y| \leq |x|.$$

D'autre part,  $X \subset \Gamma$  désignant une fonctionnelle qui remplit par l'hypothèse la condition (15), posons  $X' = \frac{1}{M}X$ . Par conséquent  $|X'| \le 1$ , d'où  $X' \subset \Delta$ . Il existe donc une suite partielle  $\{X_{r_i}\}$  faiblement convergente vers X', d'où  $\lim_{t\to\infty} |X_{r_j}(x)| = |X'(x)|$ , ce qui donne en vertu de (15) et (21),  $\overline{\lim}_{r\to a} |\eta_r| \geqslant |X'(x)| \geqslant \frac{1}{M} |x|$  et par conséquent

$$(24) |y| \geqslant \frac{1}{M} |x|.$$

En posant donc y = U(x), on voit facilement de (21) et (23) que l'opération U(x) est linéaire; en vertu de (24) il en est de même de l'opération inverse  $x = U^{-1}(y)$ . L'espace E étant par hypothèse séparable, le contredomaine  $E_1$  de U(x) l'est également par suite de la continuité de cette opération.

Ceci dit, soient X une fonctionnelle linéaire quelconque définie dans E et

(25) 
$$Y(y) = X[U^{-1}(y)],$$

de sorte que (l'opération  $U^{-1}(y)$  étant linéaire) Y est une fonctionnelle linéaire définie dans  $E_1$ . En vertu du théorème de M. S. Mazur (Chapitre IV, § 4), p. 79 (1), il existe donc une suite double de nombres  $\{\alpha_{nr}\}$  telle que

(26) 
$$Y(y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{nr} \eta_r \quad \text{pour} \quad y \subset E_1$$

et  $\alpha_{nr} = 0$  pour  $r > k_n$  où  $\{k_n\}$  est une suite de nombres naturels. On en déduit suivant (21):

(27) 
$$\sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{nr} \eta_r = \sum_{r=1}^{k_n} \alpha_{nr} \eta_r = \sum_{r=1}^{k_n} \alpha_{nr} X_r(x) = \bar{X}_n(x),$$

<sup>(1)</sup> En y remplaçant  $\Gamma$  par  $\Delta$  et  $\Delta$  par  $\{X_r\}$ .

<sup>(1)</sup> En y remplaçant  $\xi_i$  par  $\eta_r$ .

195

de sorte que  $\bar{X}_n \subset \Gamma$  pour n = 1, 2, ..., puisque  $\Gamma$  est un ensemble linéaire et  $X_n \subset \Delta \subset \Gamma$ .

Or, on a selon (26) et (27)  $Y[U(x)] = \lim_{n \to \infty} \bar{X}_n(x)$ , d'où selon (25)  $X(x) = \lim_{n \to \infty} \bar{X}_n(x)$  pour tout  $x \subset E$ ; la suite  $\{\bar{X}_n\}$  converge donc faiblement vers X. Par conséquent  $X \subset \Gamma_{(1)}$ , ce qui prouve que la condition est en effet suffisante, c.q.f.d.

Il est facile de voir que l'ensemble E de toutes les fonctions réelles bornées et continues x(q), définies dans n'importe quel ensemble métrique Q, constitue un espace du type (B), lorsqu'on y définit l'addition et la multiplication par nombres de la façon habituelle et prend comme norme

(28) 
$$||x|| = \operatorname{bornesup}_{q=Q} |x(q)|.$$

Si, en outre, l'ensemble Q est compact, l'espace E en question est séparable.

On a dans ces hypothèses le

Théorème 3.  $\{q_r\}$  désignant une suite de points dense dans  $Q_r$ , il existe pour toute fonctionnelle linéaire X définie dans E un tableau de nombres réels  $\{\alpha_{ir}\}$  et une suite de nombres naturels  $\{k_n\}$  telles que

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{r=1}^{k_i}\alpha_{ir}\,x(q_r)=X(x)\quad pour\quad x\subset E.$$

La démonstration résulte du théorème 2 qui précède, étant donné que dans ces conditions l'ensemble  $\Gamma$  des fonctionnelles linéaires de la forme  $\sum_{i=1}^{m} a_i x(q_i)$ , où  $a_i$  sont des nombres réels et m est un nombre naturel quelconques, satisfait à l'hypothèse du théorème 2.

En effet, il existe pour tout  $x \subset E$  un  $q_0 \subset Q$  tel que  $x(q_i) \geqslant \frac{1}{2} \max_{q \in Q} |x(q)| = \frac{1}{2} ||x||$  et comme  $X_0(x) = x(q_0)$  est une fonctionnelle linéaire à la norme 1 on n'a qu'à mettre M = 2.

Le théorème 3 peut être aussi déduit facilement par l'application directe du théorème de M. S. Mazur, p. 79.

# § 2. Convergence faible des éléments

Soit à présent Q un ensemble abstrait quelconque, pas nécessairement métrique, et E l'espace du type (B) de toutes les fonctions réelles bornées x(q) définies dans Q, avec la norme (28).

Une fonctionnelle X définie dans E s'appellera non négative, lorsque, quelle que soit la fonction  $x \subset E$ , la condition  $x(q) \ge 0$  pour tout  $q \subset Q$  entraı̂ne  $X(x) \ge 0$ .

Théorème 4. Toute fonctionnelle linéaire X définie dans E est une différence de deux fonctionnelles linéaires non négatives définies dans E.

Démonstration. Posons pour tout sous-ensemble S de Q

(29) 
$$\mu(S) = \operatorname{borne sup}_{T \subset S} X(\varphi_T)$$

où  $\varphi_T$  désigne d'une façon générale la fonction caractéristique de l'ensemble T. On a donc

$$(30) 0 \leqslant \mu(S) \leqslant ||X||$$

et  $\mu(S_1 + S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$  pour  $S_1$  et  $S_2$  disjoints. En raison de (29) on a de plus

$$(31) X(\varphi_S) \leqslant \mu(S).$$

Pour toute function  $x \subset E$  telle que ||x|| = 1 soit

(32) 
$$x_n(q) = \frac{i}{n} \quad \text{pour} \quad \frac{i}{n} \leqslant x(q) < \frac{i+1}{n} \text{ où } -n \leqslant i \leqslant n.$$

On a évidemment  $|x_n(q)-x(q)| \le 1/n$  pour tout  $q \subset Q$ , d'où  $||x_n-x|| \le 1/n$  et par conséquent

$$(33) x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

 $S_{i,n}$  désignant l'ensemble de tous les éléments de Q qui satisfont à l'équation  $x_n(q) = i/n$  où  $-n \le i \le n$ , posons

(34) 
$$X'(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=-n}^{n} \frac{i}{n} \mu(S_{i,n}).$$

On montre facilement que, en vertu de (33), la limite (34) existe et qu'on a selon (30)  $|X'(x)| \le ||X||$ .

Or, la fonctionnelle X'(x) est non négative, car, en admettant que

(35) 
$$x(q) \ge 0$$
 pour tout  $q \subset Q$ ,

on obtient de (30) et (34) l'inégalité

$$(36) X'(x) \geqslant 0.$$

Remarquons d'autre part que (32) donne

$$x_n(q) = \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \varphi_{S_{i,n}}(q),$$

d'où selon (31)

$$X(x_n) \leqslant \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \mu(S_{i,n})$$

et par conséquent d'après (33) et (34)

$$(37) X(x) \leqslant X'(x),$$

de sorte que la fonctionnelle

(38) 
$$X''(x) = X'(x) - X(x)$$

est également non négative, car on a en vertu de (37) l'inégalité  $X''(x) \ge 0$  toutes les fois que la condition (35) se présente. Enfin, X(x) = X'(x) - X''(x) par suite de (38).

THÉORÈME 5. Pour qu'une suite de fonctions  $\{x_n\}$  à normes bornées dans leur ensemble et appartenant à E converge faiblement vers  $\Theta$ , il faut et il suffit qu'on ait

(39) 
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{i\to\infty} |x_n(q_i)| = 0$$

pour toute suite de points  $\{q_i\}$  appartenant à Q.

Démonstration. Nécessité. Supposons, par contre, que pour une suite  $\{q_i\}$  de points de Q on ait  $\overline{\lim_{n\to\infty}}\lim_{i\to\infty}|x_n(q_i)|>\alpha>0$ . Il existe donc une suite croissante  $\{n_k\}$  de nombres naturels telle que  $\lim_{l\to\infty}|x_{n_k}(q_l)|>\alpha>0$ 

pour tout k et on peut en conséquence extraire de  $\{q_i\}$  par la méthode de la diagonale une suite partielle  $\{q_{ii}\}$  telle que

$$(40) \qquad \qquad |\lim_{i \to \infty} x_{n_k}(q_{ij})| > \alpha > 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots$$

Considérons la fonctionnelle linéaire X définie par la formule

$$X(x) = \lim_{j \to \infty} x(q_{ij})$$
 pour tout  $x \subset E$ ,

le signe Lim ayant ici le sens défini au Chapitre II, § 3, 4, p. 48. On a alors selon (40)  $|X(x_{nk})| > \alpha$  pour k = 1, 2, ..., d'où

(41) 
$$\overline{\lim}_{n\to\infty}|X(x_n)|>\alpha>0,$$

de sorte que la suite  $\{x_n\}$  ne tendrait pas faiblement vers  $\Theta$ .

Suffisance. Afin de prouver qu'une suite de fonctions  $\{x_n\}$  où  $\|x_n\| < M$  pour  $n = 1, 2, \ldots$  converge faiblement vers  $\Theta$ , il suffit donc, inversement, de montrer qu'il n'existe aucune fonctionnelle linéaire et non negative X qui remplisse l'inégalité (41).

Or, supposons par contre, qu'une telle fonctionnelle X existe; nous pouvons évidemment admettre que

(42) 
$$||X|| = 1 \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n \to \infty} X(x_n) > \alpha > 0.$$

Posons pour tout  $q \subseteq Q$ 

$$s_n(q) = \begin{cases} x_n(q) & \text{pour} \quad x_n(q) \ge 0, \\ 0 & \text{pour} \quad x_n(q) < 0, \end{cases}$$

et

$$t_n(q) = x_n(q) - s_n(q).$$

Une des limites  $\overline{\lim}_{n\to\infty} X(s_n)$  et  $\overline{\lim}_{n\to\infty} X(t_n)$  dépasse évidemment  $\frac{1}{2}\alpha$ . Soit donc

$$(43) \qquad \qquad \overline{\lim}_{n \to \infty} X(s_n) > \frac{1}{2}\alpha > 0.$$

Posons ensuite pour tout  $q \subset Q$ 

$$y_n(q) = \begin{cases} s_n(q) & \text{pour} \quad s_n(q) \geqslant \frac{1}{6}\alpha, \\ 0 & \text{pour} \quad s_n(q) < \frac{1}{6}\alpha. \end{cases}$$

Alors  $||s_n - y_n|| \le \frac{1}{6}\alpha$ , d'où selon (42) et (43)

$$(44) \qquad \qquad \overline{\lim}_{n \to \infty} X(y_n) > \frac{1}{3}\alpha > 0.$$

Désignons par  $S_n$  le sous-ensemble de Q formé de tous les  $q \subset Q$  tels que  $|x_n(q)| \geqslant \frac{1}{6}\alpha$  et soit  $\varphi_n(q)$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $S_n$ . Comme  $\|y_n\| \leqslant \|s_n\| \leqslant \|x_n\| < M$ , on a  $\varphi_n(q) \geqslant \frac{1}{M} y_n(q)$  pour tout  $q \subset Q$  et n = 1, 2, ..., donc, la fonctionnelle X étant non négative,  $X(M \cdot \varphi_n) \geqslant X(y_n)$ , d'où selon (44), en posant  $\beta = \alpha/3M$ ,

(45) 
$$\lim_{n\to\infty} X(\varphi_n) > \beta > 0.$$

Considérons la fonction d'ensemble F définie pour les sous-ensembles S de Q par l'égalité

$$(46) F(S) = X(\varphi_S)$$

où  $\varphi_S$  est la fonction caractéristique de S. L'inégalité (45) peut donc être écrite dans la forme  $\overline{\lim_{n\to\infty}} F(S_n) > \beta > 0$ . Soit  $n_1$  le plus petit nombre naturel tel que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} F(S_{n_1} S_n) > O^{(1)}.$$

Un tel  $n_1$  existe.

<sup>(1)</sup> Cf. la note (1), p. 190.

En effet, supposons par contre que  $\lim_{n\to\infty} F(S_k S_n) = 0$  et par conséquent que

$$\lim_{n\to\infty}F\left(\sum_{i=1}^kS_iS_n\right)=0$$

pour k = 1, 2, ... Il existerait donc deux suites croissantes  $\{k_j\}$  et  $\{n_j\}$  telles que pour j = 1, 2, ...

$$k_{j} < n_{j} < k_{j+1}, \quad F(S_{n_{j}}) > \beta \quad \text{et} \quad F(\sum_{i=1}^{k_{j}} S_{i} S_{n_{j}}) < \frac{1}{2}\beta.$$

En posant  $T_j = S_{n_j} - \sum_{i=1}^{k_j} S_i S_{n_j}$ , on aurait en conséquence

(48) 
$$T_{i_1}$$
 et  $T_{i_2}$  disjoints pour tout  $j_1 \neq j_2$ 

et

(49) 
$$F(T_j) > \frac{1}{2}\beta$$
 pour  $j = 1, 2, ...$ 

Par suite  $\gamma_j$  désignant la fonction caractéristique de l'ensemble  $T_j$ , les formules (46) et (49) donneraient

(50) 
$$X(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j) > n^{\frac{1}{2}} \beta$$
 pour  $n = 1, 2, ...$ 

On a cependant d'après (48)  $\left|\sum_{j=1}^{n} \gamma_{j}\right| \leq 1$ , d'où  $X\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{j}\right) \leq 1$  pour n = 1, 2, ..., contrairement à (50).

En procédant comme pour (47), on aboutit par induction à l'existence d'une suite croissante  $\{n_j\}$  satisfaisant aux inégalités  $\lim_{n\to\infty} F(S_{n_1} S_{n_2} \dots S_{n_j} S_n) > 0$ , de sorte qu'aucun des ensembles  $\{S_n\}$  n'est vide.

Soit à présent  $q_i$  pour i=1,2,... un point arbitraire de l'ensemble  $S_{n_1} S_{n_2} ... S_{n_i}$ . Evidemment, pour tout  $i \ge j$  on a donc  $q_i \subset S_{n_j}$ , d'où, par définition de  $S_n$ , l'inégalité  $|x_{n_j}(q_i)| \ge \frac{1}{6}\alpha$  pour tout j=1,2,... Il en résulte que  $\lim_{n\to\infty} |x_{n_j}(q_i)| \ge \frac{1}{6}\alpha$  et par conséquent que  $\lim_{n\to\infty} \frac{\lim_{n\to\infty} |x_n(q_i)|}{\lim_{n\to\infty} |x_n(q_i)|} \ge \frac{1}{6}\alpha$ , contrairement à l'hypothèse (39)

Théorème 6. Etant donné un espace E du type (B), pour qu'une suite  $\{x_n\}$  où  $x_n \subset E$  pour  $n=1,2,\ldots$  à normes bornées dans leur ensemble converge faiblement vers  $\Theta$ , il faut et il suffit qu'on ait

(51) 
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{i\to\infty} |X_i(x_n)| = 0$$

pour chaque suite de fonctionnelles  $\{X_i\}$  appartenant à un ensemble  $\Gamma$  de fonctionnelles linéaires définies dans E qui jouisse des propriétés suivantes:

1° l'ensemble des normes des fonctionnelles  $X \subset \Gamma$  est borné,

 $2^{\circ}$  il existe un nombre N>0 tel que pour tout élément  $x\subset E$  l'ensemble  $\Gamma$  contient une fonctionnelle X remplissant l'inégalité

$$(52) X(x) \geqslant N \cdot |x|.$$

Démonstration. Pour montrer que la condition est suffisante, considérons l'espace  $E_1$  de toutes les fonction réelles bornées, définies dans  $\Gamma$ . Faisons correspondre à tout élément  $x \subset E$  la fonction  $f \subset E_1$  donnée par la relation

(53) 
$$f(X) = X(x) \quad \text{pour} \quad X \subset \Gamma.$$

M désignant la borne supérieure des normes des fonctionnelles  $X \subset \Gamma$ , posons f = U(x). On a d'après (53) et (52)  $N \cdot |x| \le ||f|| \le M \cdot |x|$ ; par conséquent, l'opération U étant additive, elle est linéaire, de même que son opération inverse.

Ceci établi, si la suite  $\{x_n\}$  satisfait à la condition (51), on en conclut d'après (53), en posant  $f_n(X) = X(x_n)$ , que  $\lim_{n \to \infty} \frac{\lim_{i \to \infty} |f_n(X_i)|}{|f_n(X_i)|} = 0$ . Il en résulte en vertu du théorème 5, p. 196, que la suite  $\{f_n\}$  tend faiblement vers  $\Theta$ . Comme l'opération  $x = U^{-1}(f)$  est linéaire et  $x_n = U^{-1}(f_n)$ , il s'en suit en vertu du théorème 3 (Chapitre IX, § 5), p. 136, que la suite  $\{x_n\}$  converge faiblement vers  $\Theta$ .

On montre par un raisonnement semblable que la condition est nécessaire.

Théorème 7. Etant donné un espace E du type (B), pour qu'une suite  $\{x_n\}$  de ses éléments à normes bornées dans leur ensemble converge faiblement vers  $\Theta$ , il faut et il suffit qu'on ait

(54) 
$$\lim_{n\to\infty} X(x_n) = 0 \quad \text{pour tout } X \subset \Gamma,$$

où  $\Gamma$  est un ensemble de fonctionnelles jouissant des provriétés  $1^{\circ}$  et  $2^{\circ}$  et en outre faiblement compact.

Démonstration. La condition est nécessair par définition de la convergence faible des éléments. Pour prouver qu'elle est suffisante, il suffit (en raison du théorème 6) de montrer que (54) entraı̂ne (51).

Supposons par contre qu'il existe une suite partielle  $\{x_{n_k}\}$  et une suite  $\{X_i\}$  de fonctionnelles de  $\Gamma$  telles que

(55) 
$$\lim_{\substack{i \to \infty \\ i \to \infty}} |X_i(x_{n_k})| > \alpha > 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots$$

Or, l'ensemble  $\Gamma$  étant par hypothèse faiblement compact, il existerait une suite partielle  $\{X_{i_j}\}$  faiblement convergente vers une fonctionnelle  $X_0 \subset \Gamma$ , d'où selon (55)  $|X_0(x_{n_k})| \ge \alpha > 0$  pour k = 1, 2, ..., contrairement à (54).

On déduit facilement des théorèmes qui viennent d'être établis les théorèmes suivants.

THÉORÈME 8. Etant donnée une suite  $\{x_n\}$  de fonctions réelles continues, définies dans un ensemble Q métrique compact et bornées dans leur ensemble,



la condition nécessaire et suffisante pour la faible convergence de  $\{x_n\}$  vers  $\Theta$  est qu'on ait

$$\lim_{n\to\infty} x_n(q) = 0 \quad \text{pour tout } q \subset Q.$$

La démonstration s'obtient du théorème 7, en désignant par E l'espace des fonctions réelles continues définies dans Q et par  $\Gamma$  l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires X définies dans E de la forme X(x) = x(q) où  $x \subset E$  et  $q \subset Q$ . On a alors évidemment |X| = 1 pour tout  $X \subset \Gamma$  et il est aisé de voir que  $\Gamma$  remplit aussi les autres hypothèses du théorème 7.

Remarque. En particulier, on obtient aussitôt du théorème 8 les conditions pour la convergence des suites de fonctions continues définies dans l'intervalle rectiligne, resp. dans le carré.

Théorème 9. Pour qu'une suite de fonctions  $\{x_n\}$  appartenant à l'espace (M) converge faiblement vers  $\Theta$ , il faut et il suffit que pour toute suite de fonctions  $\{\alpha_i(t)\}$  telles que

$$\int_{0}^{1} |\alpha_{i}(t)| dt = 1 \quad o\tilde{u} \quad i = 1, 2, ...,$$

on ait

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{i\to\infty}\Big|\int\limits_0^1\alpha_i(t)\,x_n(t)\,dt\Big|=0.$$

La démonstration résulte du théorème 6, p. 198, en désignant par  $\Gamma$  l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires X définies dans (M) de la forme

$$X(x) = \int_0^1 x(t) \alpha(t) dt \quad \text{où} \quad \int_0^1 |\alpha(t)| dt = 1.$$

On a alors |X|=1 pour tout  $X \subset \Gamma$  et, pour tout  $x \subset (M)$ , il existe une fonction  $\alpha(t)$  vérifiant les conditions

$$\int_{0}^{1} |\alpha(t)| dt = 1 \quad \text{et} \quad \int_{0}^{1} \alpha(t) x(t) dt \geqslant \frac{1}{2} ||x||.$$

Il suffit donc de poser dans le théorème précité  $N = \frac{1}{2}$ .

Théorème 10. Pour qu'une suite  $\{x_n\}$ , où  $x_n = \{\xi_k^n\}$ , d'éléments de l'espace (m) converge faiblement vers 0, il faut et il suffit d'avoir pour toute suite d'indices  $\{k_i\}$ 

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{l\to\infty}|\xi_{k_l}^n|=0.$$

La démonstration résulte du théorème 6, p. 198, en désignant par  $\Gamma$  la suite  $\{X_j\}$  des fonctionnelles de la forme

$$X_j(x) = \xi_j$$
 où  $x = \{\xi_j\} \subset (m)$  et  $j = 1, 2, ...$ 

On a alors  $|X_j| = 1$  pour j = 1, 2, ... et il existe en outre pour tout  $x \subset (m)$  un j tel que  $|X_j(x)| \ge \frac{1}{2} ||x||$ . On posera donc  $N = \frac{1}{2}$ .

### **REMARQUES**

### INTRODUCTION

- § 3. Nous écrivons  $\lim_{n\to\infty}$  as  $x_n(t)=x(t)$ , lorsque la suite de fonctions  $\{x_n(t)\}$  converge asymptotiquement vers la fonction x(t).
- § 5. Le dernier théorème implique que si les fonctions continues  $x_n(t)$  sont bornées dans leur ensemble et la suite  $\{x_n(t)\}$  est convergente partout,  $\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,d\alpha(t)$  existe pour toute fonction  $\alpha(t)$  à variation bornée (cf. F. Riesz, Sur le théorème de M. Egoroff et sur les opérations fonctionnelles linéaires, Acta Szeged 1 (1922), p. 18-26).
- § 6. La démonstration du théorème de M. Lebesgue se trouve aussi dans l'ouvrage de M. H. Hahn, Über Folgen linearer Operationen, Monatshefte stir Math. u. Phys. 32 (1922), p. 1–88.
- § 7. La distance des éléments x et y dans (Ś) peut être définie également par la formule  $(x, y) = \underset{0 \le m < x}{\text{borne inf}} \left[\omega + mE(|x(t) y(t)| > \omega)\right]$  (¹). La métrique ainsi obtenue est équivalente à celle du texte (voir 1, p. 30).

Pareillement, dans (s) la métrique  $(x, y) = \underset{1 \le n < \infty}{\text{borne inf}} \left[ \frac{1}{n} + \max_{1 \le k \le n} |\xi_k - \eta_k| \right]$  équivaut à celle donnée dans 2, p. 30 (cf. M. Fréchet, Les espaces abstraits, Paris 1928, p. 82 et 92).

Dans les exemples 1, 3, 5, 7, 8 et 10 on pourrait d'ailleurs admettre que les fonctions en question sont définies dans un ensemble d'une nature plus générale. Ainsi p. ex. dans 5, p. 31, les fonctions peuvent être supposées définies dans un espace (D) compact arbitraire, ou même seulement complet, en se bornant dans ce dernier cas aux fonctions bornées continues, resp. uniformément continues.

Beaucoup d'exemples des espaces (D), intéressants au point de vue de la théorie des opérations, se trouvent dans les ouvrages précités de M. H. Hahn et de M. M. Fréchet; à l'égard des applications une attention spéciale méritent les espaces considérés dans les travaux de M. J. Schauder, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen et Bemerkungen zu meiner Arbeit... Math. Zeitschr. 26 (1927), p. 47-65 et 417-431 [cf. aussi J. P. Schauder, Oeuvres, PWN — Éditions Scientifiques de Pologne, Warszawa 1978, p. 63-82 et 83-98].

Parmi les autres exemples sont à noter les suivants.

11. L'espace (Q) de toutes les fonctions quasi-périodiques avec la métrique  $(x, y) = \max_{-\infty < t < +\infty} |x(t) - y(t)|$ .

<sup>(1)</sup> Pour la signification des symboles voir p. 25, renvoi (2).

12. L'espace (H(p)) où  $p \ge 1$ , formé de toutes les fonctions définies dans le cercle  $s^2 + t^2 \le 1$  et respectivement équivalentes (c.-à-d. égales presque partout) à des fonctions harmoniques. La métrique qui y est entendue est donnée par la formule

$$(x, y) = \left( \iint_{s^2 + t^2 \le 1} |x(s, t) - y(s, t)|^p \, ds dt \right)^{1/p}.$$

13. L'espace (R) des fonctions définies dans [0, 1] et équivalentes respectivement à des fonctions intégrables au sens de Riemann avec la métrique  $(x, y) = \operatorname*{vrai}_{0 \le t \le 1} \max_{x \ge t} |x(t) - y(t)|$ . Pour une fonction z(t), où  $0 \le t \le 1$ , mesurable et supérieurement bornée presque partout, vrai max z(t) désigne la borne inférieure des nombres  $\omega$  tels que  $z(t) \le \omega$  presque partout.

Les exemples 11 et 12 se trouvent dans l'ouvrage de G. Ascoli, Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari, Annali di Mathematica X (1932), p. 33-81, et l'exemple 13 dans celui de M. W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, Studia Mathematica 1 (1929), p. 1-39 et 241-255.

M. Orlicz a de plus attiré l'attention sur une classe d'espaces qui contient les espaces  $(L^{(p)})$  où p > 1 et dont les autres ont avec eux beaucoup de propriétés communes.

Soit notamment M(u) une fonction convexe définie pour toutes les valeurs réelles de u et telle que  $1^{\circ}$  M(-u) = M(u),  $2^{\circ}$   $\lim_{u \to 0} \frac{1}{u} M(u) = 0$ ,  $3^{\circ}$   $\lim_{u \to +\infty} \frac{1}{u} M(u) = +\infty$  et  $4^{\circ}$   $\lim_{u \to +\infty} \frac{1}{M(u)} M(2u) < +\infty$ .

Soit N(u) la fonction définie pour toutes les valeurs réelles de v par les relations:  $N(v) = \max_{u \in \mathcal{U}} [uv - M(u)]$ , lorsque  $v \ge 0$  et N(v) = N(-v) pour v < 0.

Ceci posé, l'ensemble (0) de toutes les fonctions x(t) définies dans [0,1] pour lesquelles il existe l'intégrale  $\int\limits_0^t M[x(t)] dt$ , métrisé par la formule

$$(x,y) = \text{borne sup } \int_0^1 [x(t) - y(t)] \omega(t) dt$$
 où  $\int_0^1 N[\omega(t)] dt \leq 1$ ,

constitue un espace métrique complet.

En particulier, pour

$$M(u) = \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^p \cdot |u|^p$$

où p > 1, on a  $N(v) = |v|^{p/(p-1)}$  et

$$(x, y) = (\int_{0}^{1} |x(t) - y(t)|^{p})^{1/p},$$

de sorte que l'espace (0) est dans ce cas identique à  $(L^{(p)})$ .

En remplaçant dans la définition de M(u) la condition  $4^{\circ}$  par  $\lim_{u\to\infty}\frac{1}{M(u)}M(2u)<+\infty$  sans y changer la définition de N(v), l'espace (o) des suites de nombres réels  $\{\xi_n\}$  telles que la série  $\sum_{n=1}^{\infty}M(\xi_n)$  est convergente, métrisé par la formule

$$(x, y) = \text{borne sup} \sum_{n=1}^{y} (\xi_n - \eta_n) \omega_n \quad \text{où} \quad x = \{\xi_n\}, \ y = \{\eta_n\} \ \text{et} \sum_{n=1}^{y} N(\omega_n) \leqslant 1,$$

constitue aussi un espace métrique complet, dont les espaces ( $l^{(p)}$ ) avec p > 1 sont des cas particuliers (cf. W. Orlicz, Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus (B), Bull. de l'Acad. Polonaise des Sci. et des Lettres, Février 1932).

Il est enfin à remarquer qu'aucun des espaces 1-13, (0) et (o) n'est compact; plus encore: dans chacun d'eux les ensembles compacts sont non denses,

- § 8. Les espaces 1, 2, 5-10 et 12, de même que les espaces (O) et (o) de M. W. Orlicz, sont séparables. Par contre les espaces 3, 4, 11 et 13 ne sont pas séparables, tout en étant, comme les précédents, de puissance du continue. Dans chacun de ces derniers espaces les ensembles de puissance inférieure à celle du continu sont non denses.
- § 9. Comme l'a remarqué M. K. Kuratowski, si une opération mesurable (B) transforme d'une façon biunivoque un espace métrique séparable E en espace métrique  $E_1$ . l'opération inverse remplit la condition de Baire. La démonstration s'appuie sur le théorème 7, p. 35, et sur le théorème suivant: pour qu'une opération U(x) définie dans un espace métrique E et dont le contredomaine est situé dans un espace métrique  $E_1$  remplisse la condition de Baire, il faut et il suffit que pour tout ensemble fermé  $G_1 \subset E_1$  l'ensemble G d'éléments  $x \subset E$  tels que  $U(x) \subset G_1$  remplisse la condition de Baire (v. C. Kuratowski, La propriété de Baire dans les espaces métriques, Fundamenta Mathematicae 16 (1930), p. 390-394).

#### CHAPITRE I

§ 1. Etant donné que les espaces du type (F), étudiés dans les chapitres suivants, constituent des cas particuliers des espaces du type (G), notamment lorsqu'on les considère comme des groupes par rapport à l'addition qu'on y définit, il a été préférable de fixer d'emblée le nom d'addition à l'opération fondamentale du groupe et d'y conformer les énoncés et la notation.

Tous les espaces métriques 1-13, (O) et (o) constituent, comme on voit aussitôt, autant d'espaces du type (G); comme opération fondamentale du groupe on y admettra l'addition ordinaire des fonctions, resp. des suites. Tous ces espaces sont *abeliens*, c.-à-d. que l'addition définie dans eux est commutative (en formule: x+y=y+x).

Parmi d'autres exemples des espaces du type (G) on peut citer les suivants:

- 14. L'espace des transformations homéomorphes d'un espace métrique compact Q en lui-même, lorsqu'on définit la distance de deux homéomorphies x et y par la formule  $(x, y) = \text{borne sup } (x(q), y(q)) + \text{borne sup } (x^{-1}(q), y^{-1}(q))$  et entend par l'addition la composition ordinaire des transformations.
- 15. L'espace des transformations isométriques d'une sphère (située dans un espace métrique) en elle-même, lorsqu on y définit la métrique et l'addition comme dans l'exemple précédent.
- 16. L'espace de toutes les fonctions définies dans un espace métrique Q et admettant comme valeurs les nombres complexes à module 1 (on peut les supposer en outre continues ou uniformément continues), lorsqu'on définit la distance de deux fonctions x et y par la formule (x, y) = borne sup(x(q) y(q)) et entend par l'addition la multiplication ordinaire des fonctions.
- 17. L'espace des transformations biunivoques de l'ensemble des nombres naturels en lui-même avec la métrique

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x(n) - y(n)| + |x^{-1}(n) - y^{-1}(n)|}{1 + |x(n) - y(n)| + |x^{-1}(n) - y^{-1}(n)|}.$$

(où x(n), etc. désigne l'image de n obtenue par la transformation x, etc.) et avec l'addition entendue comme composition des transformations.

Etant donné un espace arbitraire E du type (G), si une suite  $\{x_n\}$  d'éléments de E est convergente, on a évidemment

(I) 
$$\lim_{p\to\infty,q\to\infty}(x_p-x_q,\,\Theta)=0,$$

mais on ne sait pas si, réciproquement, la condition (1) entraîne toujours la convergence de cette suite.

Si dans un espace métrique E l'addition des éléments est définie de manière que E constitue par rapport à elle un groupe, et même les axiomes  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  étant remplis, il ne suffit pas que la condition (I) entraîne toujours la convergence de la suite  $\{x_n\}$  vers un élément de E, pour que l'espace E soit complet. On ignore toutefois s'il n'existe alors dans E une autre métrique, équivalente à la métrique donnée, et qui en formerait un espace du type (G). M. D. van Dantzig a montré qu'il en est ainsi dans l'hypothèse supplémentaire que E est un espace abelien; dans ce cas on peut trouver même une métrique équivalente "glissante", c.-à-d. telle qu'on ait (x, y) = (x+z, y+z) pour tout  $z \subset E$  (cf. D. van Dantzig, Einige Sätze über topologische Gruppen, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 41, 1932).

La définition des espaces du type (G) de même que tous les théorèmes du texte se trouvent dans la note: S. Banach, Über metrische Gruppen, Studia Mathematica 3 (1931), p. 101-113 [ce volume, p. 402-411]; cf. aussi F. Leja, Sur la notion de groupe abstrait topologique, Fundamenta Mathematicae 9 (1927), p. 37-44.

- § 2. Les espaces 1-10 (Introduction, § 7, p. 30-32), de même que les espaces 11-13, (O) et (o) définis ici (v. p. 202), sont connexes.
- § 3. Outre le théorème 5, p. 41, on a le théorème: l'espace E étant connexe, si  $\{U_n(x)\}$  est une suite de fonctionnelles linéaires, l'ensemble des points où cette suite est bornée est soit de I-e catégorie, soit identique à E.
- § 4. Il résulte de la remarque précédente que, l'espace E étant connexe, si  $\{U_{p,q}(x)\}$  est une suite double de fonctionnelles linéaires telles qu'on a pour une suite  $\{x_p\}$  d'éléments de E la formule  $\varlimsup_{q\to\infty}|U_{p,q}(x_p)|=+\infty$  quel que soit p, l'ensemble de tous les  $x\subset E$  tels que  $\varlimsup_{q\to\infty}|U_{p,q}(x)|=+\infty$  pour p=1,2,... est de II-e catégorie et son complément est de I-e catégorie.

On peut montrer que les théorèmes 3-7 du Chapitre III (p. 51-54) subsistent déjà pour les espaces E et  $E_1$  du type (G), lorsque l'espace E est supposé séparable (cf. S. Banach, l. c., Studia Math. 3, p. 101-113 [ce volume, p. 402-411]). Le théorème 5, p. 53, est aussi une conséquence immédiate du théorème 4, p. 40, et de la remarque, p. 203. L'hypothèse que E soit séparable est essentielle; il serait intéressant de savoir si les théorèmes 3-7 en question subsistent aussi pour des espaces du type (G) non séparables, mais connexes.

Il est à remarquer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour chaque espace E du type (G):

- ( $\alpha$ ) étant donnée une opération linéaire y = U(x) qui transforme E d'une façon biunivoque en un espace  $E_1$  du type (G), l'opération inverse  $x = U^{-1}(y)$  est linéaire;
- ( $\beta$ ) étant donnée dans E une autre métrique  $(x, y)^*$  par rapport à laquelle E est également un espace du type (G), si  $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$  implique toujours  $\lim_{n\to\infty} (x_n, x_0)^* = 0$ , alors on a aussi l'implication inverse.

Or, on ignore si ces propriétés se présentent p. ex. pour l'espace fonctionnel E coïncidant avec celui de l'exemple 16, p. 203, lorsqu'on y désigne par Q l'ensemble des nombres complexes à module 1.

#### CHAPITRE II

§ 1. On peut également traiter les espaces vectoriels avec une multiplication des éléments non seulement par les nombres réels, mais aussi par les nombres complexes et sans que les axiomes 1)-7) soient modifiés. Ces espaces constituent le point de départ de la théorie des

opérations linéaires complexes et d'une classe, encore plus vaste, des opérations analytiques, qui présentent une généralisation des fonctions analytiques ordinaires (cf. p. ex. L. Fantappiè, I funzionali analitici, Città di Castello 1930). Nous nous proposons d'en exposer la théorie dans un autre volume.

Un ensemble H situé dans un espace vectoriel E s'appelle base de Hamel dans E, lorsque tout élément  $x \subseteq E$  est une combinaison linéaire des éléments de H sans qu'aucun  $x \subseteq H$  soit une combinaison linéaire des autres éléments de H. Toute espace vectoriel admet des bases de Hamel et elles sont deux à deux toujours de puissance égale.

- $\S$  2. La remarque précédente implique pour tout espace vectoriel E l'existence des fonctionnelles additives, homogènes et non identiquement nulles, définies dans E.
- § 3. Le dernier théorème (voir p. 48, 4) implique aussitôt qu'à tout sous-ensemble S de l'ensemble des nombres naturels N on peut assigner une mesure mS de façon que 1)  $mS \ge 0$ , 2)  $m(S_1 + S_2) = mS_1 + mS_2$  pour  $S_1$  et  $S_2$  disjoints, 3)  $mS_1 = mS_2$ , lorsque  $S_1 \cong S_2$  et 4) mN = 1.

Quelle que soit la mesure assujettie aux conditions 1)-4), l'ensemble de tous les nombres de la forme an+b pour n=1,2,..., avec a et b fixes, est de mesure 1/a; l'ensemble de tous les nombres premiers est de mesure 0. Une mesure satisfaisant aux conditions 1)-4) ne coıncide pas toujours avec la densité (lorsque celle-ci est définie), mais on peut toujours s'arranger de façon que cette condition supplémentaire soit également satisfaite.

#### CHAPITRE III

§ 1. Au sujet de la définition des espaces du type (F) voir M. Fréchet, Les espaces abstraits topologiquement affines, Acta Math. 47 (1926), p. 25-52.

Evidemment, les espaces 11-13, (0) et (0), définis p. 201-202, sont aussi du type (F).

M. S. Mazur a remarqué que tout espace du type (F) remplit la condition

(1) si 
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$
,  $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ ,  $\lim_{n\to\infty} h_n = h$  et  $\lim_{n\to\infty} k_n = k$ , alors  $\lim_{n\to\infty} (h_n x_n + k_n y_n) = hx + ky$ .

On ne sait pas si dans tout espace vectoriel, complet et satisfaisant à la condition (1) la métrique peut être remplacée par une métrique équivalente de manière à en obtenir un espace du type (F).

- $\S$  3. Les théorèmes 3-9, p. 51-52, restent valables pour tout espace métrique vectoriel E satisfaisant à la condition (1) et à la condition suivante:
  - (2) si  $\lim_{\substack{p\to\infty\\q\to\infty}}(x_p-x_q)=0$ , il existe un élément  $x\subset E$  tel que  $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ .
- M. Mazur suppose de pouvoir remplacer cette dernière condition par l'hypothèse que l'espace E est complet. Une démonstration simple des théorèmes 3-5 pour le cas des espaces du type (B) se trouve dans la note de M. J. Schauder, Über die Umkehrung linearer stetiger. Funktionaloperationen, Studia Math. 2 (1930), p. 1-6 [Oeuvres, p. 162-167].

Considérons à présent, dans un espace E du type (F), un ensemble quelconque  $G \subset E$ , linéaire et fermé. Il est évident qu'on obtiendra une décomposition de E en parties disjointes, si on convient de ranger deux éléments x et y de E dans une même partie, lorsqu'on a  $x-y \subset G$ , et seulement alors. On a le théorème suivant: l'ensemble  $E^*$  des parties de E ainsi obtenues constitue un espace du type (F), lorsqu'on y définit la distance et les opérations fondamentales par les conditions (où X, Y et Z désignent des éléments de  $E^*$ ):

- $1^{\circ}(X, Y) = \text{borne inf}(x, y) \text{ où } x \subset X \text{ et } y \subset Y,$
- $2^{\circ}$  X+Y est celui des  $Z\subset E^*$  qui contient les éléments de la forme x+y où  $x\subset X$  et  $y\subset Y$ ,
  - $3^{\circ}$  tX est celui des  $Y \subset E^*$  qui contient les éléments de la forme tx où  $x \subset X$ .

La démonstration de ce théorème se trouve dans mon livre Teorja operacyj, Tom I, Warszawa 1931, p. 47-49 (en polonais); cf. aussi F. Hausdorff, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, Journ. f. reine u. angew. Math. 167 (1932), p. 294-311.

En s'appuyant sur ce théorème, on peut montrer que, étant donnée une opération linéaire U définie dans une espace E du type (F) et dont le contredomaine est situé dans un espace  $E_1$ , également du type (F), si E est séparable, le contredomaine de U est mesurable (B). Cependant, on ne sait pas si l'hypothèse que E soit séparable est essentielle.

- § 4. Les travaux suivants contiennent des applications d'une autre méthode de la théorie des opérations à ce problème et aux problèmes voisins:
  - S. Mazurkiewicz, Sur les fonctions non dérivables, Studia Math. 3 (1931), p. 92-94,
  - S. Mazurkiewicz, Sur l'intégrale  $\int_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)dt}{t}$ , ibid., p. 114-118,
- S. Banach, Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, ibid., p. 173-179 [cette édition, vol. I, p. 218-222].
- H. Auerbach et S. Banach, Über die Höldersche Bedingung, ibid., p. 180-184 [cette édition, vol. I, p. 223-227].
  - S. Kaczmarz, Integrale vom Dinischen Typus, ibid., p. 189-199.
- § 5. Les autres applications de la théorie des opérations aux problèmes concernant les équations différentielles sont données dans les notes suivantes:
- S. Banach, Sur certains ensembles de fonctions conduisant aux équations partielles du second ordre, Math. Zeitschr. 27 (1927), p. 68-75 [cette édition, vol. I, p. 169-177].
- W. Orlicz, Zur Theorie der Differentialgleichung dy/dx = f(x, y), Bull. Acad. Polon. Sci. et des Lett., Février 1932.
- § 7. Etant donné un ensemble linéaire fermé  $G \subset (s)$ , il existe pour tout élément  $x_0 \subset (s) G$  une fonctionnelle linéaire f(x) définie dans (s) et telle qu'on a f(x) = 0 pour tout  $x \subset G$  et  $f(x_0) = 1$ .
- Le théorème 12, p. 61, implique que si le contredomaine d'une opération linéaire définie dans (s) est situé dans (s), il est un ensemble fermé.

#### CHAPITRE IV

§ 1. Les espaces vectoriels normés ont été traité indépendamment de moi et presqu'à la même époque par M. N. Wiener, dans son ouvrage Limit in terms of continuous transformations, Bull. de la Soc. math. de France 150 (1922), p. 124-134.

Les espaces 11-13, (0) et (0), définis p. 201-202, sont du type (B). Par contre, l'espace (s) de l'exemple 2, p. 30 (v. aussi p. 60-62) n'est pas du type (B) et même, comme l'a démontré M. S. Mazur, il n'est homéomorphe à aucun espace du type (B).

- $\S$  2. et 3. On peut établir pour les espaces E du type (F) l'équivalence des deux propriétés suivantes:
- (a) Etant donnée une fonctionnelle linéaire f(x) définie dans un ensemble linéaire  $G \subset E$ , il existe une fonctionnelle linéaire F(x) définie dans E et telle que F(x) = f(x) pour tout  $x \subset G$ .
- ( $\beta$ ) Dans les mêmes conditions, si G est en outre fermé, il existe pour tout  $x_0 \subset E G$  une fonctionnelle linéaire F(x) définie dans E et telle que  $F(x_0) \neq 0$ , mais F(x) = 0 quel que soit  $x \subset G$ .

Or, ces propriétés ne se présentent pas nécessairement dans tous les espaces du type (F). Ainsi p. ex. toutes les fonctionnelles linéaires définies dans l'espaces (S) s'annulent identiquement.

Etant donnés deux espaces E et  $E_1$  du type (B) et une opération linéaire U(x), définie dans l'ensemble linéaire  $G \subset E$ , dont le contredomaine est situé dans  $E_1$ , on ne sait pas si elle se laisse *étendre* (prolonger) de G sur E tout entier, C-à-d. s'il existe une opération

linéaire V(x) définie dans E, ayant son contredomaine dans  $E_1$  et telle que V(x) = U(x) pour tout  $x \subset G$ .

Cette extension de U(x) est toujours possible, lorsque  $E_1$  est à un nombre fini de dimensions, mais même alors la condition  $|V|_E = |U|_G$  peut rester irréalisable.

- § 4. Les conditions 1°-3°, p. 79, peuvent être remplacées par les deux suivantes:
- 1)  $\alpha_{nj} = 0$  pour tout j > n où n = 1, 2, ...;
- 2)  $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ni}| = |f|$  pour n = 1, 2, ...

La forme générale des fonctionnelles linéaires dans les espaces (0) et (0) de M. Orlicz (cf. p. 202) est établie dans son ouvrage cité. Ainsi p. ex. toute fonctionnelle linéaire f(x) définie dans l'espace (0) est de la forme  $f(x) = \int_0^1 x(t)\alpha(t) dt$  où  $\alpha(t)$  est une fonction telle que  $\int_0^1 N(k\alpha(t)) dt$  existe pour un k compris entre 0 et 1.

Selon M. F. Riesz la norme de la fonctionnelle linéaire  $f(x) = \int_0^1 x(t) dg(t)$  définie dans (C), où g(t) est une fonction à variation bornée, est égale à la variation de la fonction  $\bar{g}(t)$  définie comme suit:  $\bar{g}(0) = g(0)$ ,  $\bar{g}(1) = g(1)$  et  $\bar{g}(t) = \lim_{k \to +0} g(t+k)$  pour 0 < t < 1.

- § 6. Voir F. Riesz, Sur l'approximation des fonctions continues et des fonctions sommables, Bull. Calcutta Math. Soc. 20 (1928/29), p. 55-58.
- § 8. Voir le livre de F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris 1913.

#### CHAPITRE V

§ 1. Le théorème 3, p. 85, implique que l'ensemble Q des points de convergence d'une suite d'opérations linéaires  $\{U_n(x)\}$  à normes bornées dans leur ensemble est toujours fermé. Dans le cas général Q est un  $F_{ab}$ .

Il est à noter à ce propos que, comme l'ont montré MM. S. Mazur et L. Sternbach, si  $\{U_n(x)\}$  est une suite de fonctionnelles linéaires et l'ensemble Q de ses points de convergence n'est pas fermé, il existe dans Q une suite de points  $\{x_i\}$  et un point  $x_0 \subset E-Q$  tels que  $\lim_{t\to\infty} x_i = x_0$  et que la suite double  $\{U_n(x_i)\}$  est bornée. On en déduit comme corollaire que dans ces conditions Q n'est pas un  $F_\sigma$ . Or, ces énoncés se laissent étendre au cas où  $\{U_n(x)\}$  est, plus généralement, une suite d'opérations linéaires, pourvu que leurs contredomaines soient situés dans un espace  $E_1$ , aussi du type (B) et jouissant de la propriété:

(7) pour toute suite  $\{y_n\}$ , où  $y_n \subset E_1$  et  $|y_n| = 1$  pour n = 1, 2, ..., il existe une suite de nombres  $\{t_n\}$  telle que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$  soit divergente et que la suite des normes de ses sommes partielles soit bornée.

De la propriété  $(\gamma)$  jouissent p. ex. l'espace (c) et tous les espaces du type (B) à un nombre fini de dimensions.

Le corollaire qui vient d'être mentionné se laisse, selon une remarque commune de M. S. Mazur et moi, préciser davantage en ce sens que dans les conditions considérées l'ensemble Q n'est pas un  $G_{\delta\sigma}$ . Comme application, on en tire le théorème que tout espace E du type (B) à une infinité de dimensions contient un ensemble linéaire qui est un  $F_{\sigma\delta}$  sans être un  $G_{\delta\sigma}$ . MM. S. Mazur et L. Sternbach ont montré en outre que tout espace de ce genre contient un ensemble linéaire qui, sans être un  $F_{\sigma\tau}$ , est une partie commune d'un  $F_{\delta}$  et d'un  $G_{\delta\tau}$ ; cependant tout ensemble linéaire  $G_{\delta\tau}$  y est fermé.

Dans certains espaces du type (B) on peut établir l'existence des ensembles linéaires qui sont des  $F_{\sigma\delta\sigma}$  sans être des  $F_{\sigma\delta}$ . Reste ouvert le problème s'il en existe toujours dans des espaces du type (B) à une infinité de dimensions. On ignore aussi s'il existe des espaces du type (F) contenant des ensembles linéaires des classes de Borel plus élevées ou des ensembles linéaires (A) non mesurables (B) ou encore des ensembles linéaires remplissant la condition de Baire, mais n'étant pas (A). Tout espace du type (F) à une infinité de

dimensions contient des ensembles linéaires ne remplissant pas la condition de Baire.

Ces problèmes se rattachent à certaines questions concernant les opérations additives. E et  $E_1$  étant du type (F), toute opération U(x) additive et mesurable (B) définie dans un ensemble linéaire fermé  $G \subset E$  et dont le contredomaine se trouve dans  $E_1$  est en vertu du théorème 4, p. 40, continue. Or, si l'ensemble G n'est pas fermé, l'opération U(x) peut ne pas être continue: nous connaissons des exemples où, G étant mesurable (B), l'opération U(x) est discontinue de I-e classe de Baire; mais nous ne connaissons aucun exemple où elle soit d'une classe de Baire plus élevée. De même, on ignore si l'opération U(x) peut remplir la condition de Baire sans être en même temps mesurable (B).

On est amené aux opérations additives discontinues par l'inversion des opérations linéaires. E et  $E_1$  étant du type (F), si l'opération linéaire y=U(x) transforme d'une façon biunivoque E en un ensemble fermé  $G_1 \subset E_1$ , l'opération inverse  $x=U^{-1}(y)$  est en vertu du théorème 5, p. 53, continue. Or, si  $G_1$  n'est pas fermé, l'opération  $U^{-1}$  peut ne pas être continue, mais si l'espace E est séparable, elle est toujours mesurable (B). Ainsi, p. ex., dans le cas où  $E=E_1=(L^2)$ , cette opération est de I-e classe de Baire.

- § 3. Le lemme et le théorème 8 se trouvent dans la Note de M. F. Riesz, l. c., p. 151. On aperçoit aisément que le théorème réciproque du théorème 8 est aussi vrai. En outre, le théorème 8 se laisse généraliser comme suit: tout espace du type (F) contenant une sphère qui y est compacte n'a qu'un nombre fini de dimensions; il est facile de voir que la réciproque est encore vraie.
- § 4. Le théorème sur  $(L^{(r)})$  établi p. 89, provient pour le cas r=1 de M. H. Lebesgue (v. Annales de Toulouse, 1909).
  - § 6. Tous ces exemples sont bien connus.
- § 7. La méthode A, qui correspond au tableau (A), s'appelle normale, lorsque  $a_{ik} = 0$  pour i < k et  $a_{ik} \neq 0$  pour i = k. Telles sont pour k > 0 les méthodes  $C_k$  de Cesàro, de même que les méthodes  $E_k$  de Euler. Ces dernières sont d'après M. S. Mazur (l. c., Studia Math. 2, p. 40-50) des méthodes parfaites.

On ne sait pas si le théorème 11, p. 97, subsiste, lorsque la méthode A n'est pas reversible.

Le théorème 12, p. 97, peut être complété comme suit: si la méthode A est permanente, reversible et telle que chaque suite sommable par A vers un nombre l'est vers le même nombre par toute méthode permanente pas plus faible de A, alors A est une méthode parfaite.

Le théorème sur la forme générale des fonctionnelles linéaires définies dans un espace vectoriel séparable  $E \subset (m)$  (voir p. 79) montre que toute fonctionnelle linéaire f(x) y coincide avec une limite généralisée obtenue par certaine méthode A, c.-à-d. qu'il existe un tableau (A) tel que toute suite  $x \subset E$  est sommable vers f(x) par la méthode correspondante à ce tableau. Or, si E n'est pas séparable, ce théorème peut être en défaut; plus encore, il peut exister alors, comme l'a observé M. S. Mazur, une suite  $\{f_n(x)\}$  de fonctionnelles linéaires définies dans E, faiblement convergente vers une fonctionnelle linéaire f(x) et telle que  $f_n(x)$  coincide pour tout n = 1, 2, ... avec une limite généralisée obtenue par une méthode convenable, tandis que f(x) soit dépourvue de cette propriété.

#### CHAPITRE VI

§ 1. La notion d'opération totalement continue est due à M. D. Hilbert et à M. F. Riesz, qui ont été aussi les premiers à en mettre en évidence l'utilité.

Selon une remarque de M. S. Mazur, on a le théorème suivant:  $\{U_n(x)\}$  étant une suite d'opérations linéaires et totalement continues, définies dans un espace E du type (B) et telles que  $\lim_{n\to\infty}U_n(x)=x$  pour tout  $x\subset E$ , la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble  $G\subset E$  soit compact, est que la convergence de  $\{U_n(x)\}$  sur G soit uniforme. Un espace E qui admet une telle suite d'opérations est en vertu du théorème 1, p. 98, séparable. La question si, réciproquement, tout espace E du type (B) séparable admet une pareille suite d'opérations, reste ouverte.

Au sujet du critère de la compacticité pour  $G \subset E$  cf. aussi A. Kolmogoroff, Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel, Göttinger Nachrichten 1931, p. 60-63.

- § 2. Tous ces exemples sont connus.
- § 3. La notion d'opération conjuguée a été introduite en toute généralité pour la première fois dans ma Note Sur les fonctionnelles linéaires II, Studia Mathematica 1 (1929), p. 223-239 [ce volume p. 381-395], qui contient aussi le théorème 3, p. 101. La démonstration du théorème 4, p. 102, se trouve également dans la Note de M. J. Schauder, Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, Studia Mathematica 2 (1930), p. 185-196 [cf. aussi Oeuvres, Warszawa 1978, p. 177-189].

#### CHAPITRE VII

§ 1. M. W. Orlicz a observé que pour les espaces E faiblement complets le théorème 2, p. 108, peut être précisé davantage, à savoir que la série (2) est alors convergente pour tout  $x \in E$ .

Un système biorthogonal  $\{x_i\}$ ,  $\{f_i\}$  s'appelle complet si les suites  $\{x_i\}$  et  $\{f_i\}$  sont des suites totales (voir les définitions p. 54 et 67). On peut montrer qu'il existe des systèmes biorthogonaux complets dans tout espace du type (B) séparable.

- Un système biorthogonal  $\{x_i\}$ ,  $\{f_i\}$  est dit normé, lorsqu'on a  $|x_i|=|f_i|=1$  pour i=1,2,... Selon une remarque de M. H. Auerbach, il existe des systèmes biorthogonaux normés et complets dans tout espace du type (B) à un nombre fini de dimensions. Cependant on ne sait pas s'il en est ainsi dans tout espace du type (B) séparable et même s'il y existe toujours un système biorthogonal complet tel que  $|x_i|=1$  pour i=1,2,... et  $\overline{\lim} |f_i| < \infty$ .
- § 2. En vertu de la remarque précédente on peut supprimer dans le théorème 5, p. 109, l'hypothèse que les suites  $\{x_i(t)\}$  et  $\{y_i(t)\}$  soient complètes.
- § 3. Le théorème, suivant lequel le système de Haar constitue une base dans  $(L^{(p)})$  où  $p \ge 1$ , se trouve dans la Note de M. J. Schauder, Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems, Math. Zeitschr. 28 (1928), p. 317-320 [Oeuvres, p. 99-102].

On peut montrer que, étant donnée dans un espace E du type (B) une suite d'éléments  $\{x_n\}$  telle qu'il existe pour tout  $x \subset E$  exactement une suite de nombres  $\{t_n\}$  donnant lieu à la faible convergence de la suite

$$\left\{\sum_{n=1}^k t_n \, X_n\right\}$$

vers x, la suite  $\{x_n\}$  constitue dans E une base.

L'espace  $(C^{(p)})$  (v. exemple 7, p. 31) admet une base pour p = 1, 2, ...; on ignore cependant s'il en existe une dans l'exemple 10, p. 32. On ne sait non plus s'il y a une

Remarques

base p. ex. dans l'espace de toutes les fonctions réelles x(s,t) définies dans le carré  $0 \le s \le 1$ ,  $0 \le t \le 1$  et admettant les dérivées partielles d'ordre 1 continues, les opérations élémentaires dans cet espace étant définies comme d'ordinaire et la norme étant donnée par la formule

$$||x|| = \max_{\substack{0 \le s \le 1 \\ 0 \le t \le 1}} |x(s,t)| + \max_{\substack{0 \le s \le 1 \\ 0 \le t \le 1}} |x'_s(s,t)| + \max_{\substack{0 \le s \le 1 \\ 0 \le t \le 1}} |x'_t(s,t)|.$$

L'existence d'une base dans tout espace E du type (B) séparable équivaut en vertu du théorème 9, établi au Chapitre XI, § 8, p. 169, à l'existence d'une base dans tout ensemble linéaire fermé  $E_1 \subset (C)$ . Or, on ne connaît aucun exemple d'espace du type (B) séparable, ayant une infinité de dimensions, non isomorphe avec  $(L^2)$  et tel que chacun de ses sous-ensembles linéaires fermé contienne une base. Remarquons toutefois que tout espace du type (B) à une infinité de dimensions renferme un ensemble linéaire fermé à une infinité de dimensions qui admet une base.

La notion de base peut être évidemment introduite d'une façon plus générale déjà pour les espaces du type (F). Dans l'espace (s) la base est donnée p. ex. par la suite d'éléments

$$\{x_i\}$$
 où  $x_i = \{\xi_n^i\}$  et  $\xi_n^i = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = n, \\ 0 & \text{pour } i \neq n. \end{cases}$ 

L'espace (S) ne contient aucune base; c'est une conséquence du fait qu'il n'y existe aucune fonctionnelle linéaire ne s'annulant pas identiquement.

#### CHAPITRE VIII

- § 4 et 5. Suivant une remarque de M. S. Mazur, les théorèmes 2-4, p. 120-121, subsistent aussi dans les espaces E du type (F), en remplaçant la condition (20) dans les théorèmes 2 et 3 par la condition que la suite des fonctionnelles  $\{f_n(x)\}$  soit bornée dans une sphère.
- § 6. Les conditions pour la convergence faible des fonctionnelles ont été données pour les espaces (c) par M. H. Hahn et pour les espaces ( $l^{(p)}$ ) où  $p \ge 1$  par M. F. Riesz.

Les conditions (45) et (46), données pour la faible convergence des fonctionnelles linéaires définies dans l'espace (c) (voir p. 126 et corriger selon p. VIII) prennent pour le cas de l'espace (c<sub>0</sub>) la forme: 1° la suite  $\{\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{in}|\}$  bornée et 2°  $\lim_{n\to\infty} \alpha_{in} = \alpha_i$  pour i=1,2,...

#### CHAPITRE IX

- § 1. La notion de convergence faible des éléments a été étudiée pour la première fois dans l'espace  $(L^2)$  par M. D. Hilbert et dans les espaces  $(L^{(p)})$  où p>1 par M. F. Riesz. Un ensemble G situé dans un espace E du type (B) est dit faiblement compact, lorsque toute suite d'éléments de G contient une suite faiblement convergente. Dans les espaces  $(L^{(p)})$  et  $(l^{(p)})$  où p>1 tout ensemble borné est faiblement compact (cf. p. 126). Il en est de même dans (c) et  $(c_0)$ , tandis que les espaces (C), (L), (l) et (m) sont dépourvus de cette propriété.
- § 2. Les conditions pour la convergence faible des éléments ont été données pour l'espace (c) par M. H. Hahn et pour les espaces (C) et  $(I^{(p)})$  où  $p \ge 1$  par M. F. Riesz. Le théorème, p. 130, sur l'équivalence dans (l) de la convergence faible avec la convergence suivant la norme se trouve dans la Note de M. J. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journ. f. reine u. angew. Math. 151 (1921), p. 79-111.

Il est à remarquer que la convergence faible d'une suite des fonctionnelles linéaires définies dans un espace E du type (B) n'est pas une condition suffisante pour la convergence faible de la même suite, lorsqu'on regarde cette dernière comme une suite d'éléments dans l'espace  $\bar{E}$ , c.-à-d. dans l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires définies dans E (et qui est également du type (B)). Ainsi p. ex. dans (I) la notion de la convergence faible varie suivant qu'on en considère les éléments comme des représentants des fonctionnelles linéaires ou non.

§ 4. Un espace E du type (B) s'appelle faiblement complet, lorsque toute suite  $\{x_n\}$  d'éléments de E, faiblement convergente (c.-à-d. telle que  $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$  existe pour toute fonctionnelle linéaire f(x) définie dans E), est faiblement convergente vers un élément de E. L'espace  $(c_0)$ , donc aussi les espaces (c) et (m), ne sont pas faiblement complets. La propriété d'être faiblement complet a été établie pour l'espace (L) par M. H. Steinhaus  $(v. Additive und stetige Funktionaloperationen, Math. Zeitschr. 5 (1918), p. 186-221) et pour les espaces <math>(L^{(p)})$  et  $(l^{(p)})$  où p>1 par M. F. Riesz (v. Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69 (1910), p. 449-497). Suivant une remarque de <math>M. W. Orlicz (l. c. Bull. de l'Acad. Polon. des Sci. et des Let., Fevrier 1932), l'espace <math>(O) est faiblement complet, si  $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N(u)} N(2u) < +\infty$ ; il en est de même pour l'espace (O).

Une série d'éléments d'une espace du type (B) s'appelle commutativement convergente ("unbedingt konvergent"). lorsqu'elle reste convergente indépendamment de l'ordre de succession de ses termes. La propriété 7° (Chapitre III, § 3), p. 50, établie pour les espaces du type (F) implique aussitôt que la convergence absolue d'une série en entraîne toujours la convergence commutative, mais on ne sait pas si la réciproque est vraie en dehors des espaces à un nombre fini de dimensions. M. W. Orlicz a démontré les théorèmes suivants.

- (1) La somme d'une série commutativement convergente ne dépend pas de l'ordre de ses termes,
- (2) Afin qu'une série soit commutativement convergente, il faut et il suffit que toute série partielle soit convergente,
- (3) A la même fin, il faut et il suffit que toute suite partielle soit faiblement convergente vers un élément.

Il en résulte dans l'hypothèse que l'espace E est faiblement complet que, pour la convergence commutative d'une série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  d'éléments de E, il faut et il suffit que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|$  soit convergente pour toute fonctionnelle linéaire f(x) définie dans E. Ce dernier résultat permet d'établir pour les espaces faiblement complets plusieurs propriétés importantes des séries commutativement convergentes d'éléments, tout à fait analogues à celles des séries commutativement convergentes de nombres. Ainsi p. ex. une série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  est commutativement convergentes de nombres. Ainsi p. ex. une série  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  est commutativement convergente, lorsqu'il existe un nombre M > 0 tel que l'ont ait  $|x_{n_1} + x_{n_2} + ... + x_{n_k}| < M$ , quel que soit le système d'indices différents  $n_1, n_2, ..., n_k$ , ou encore, lorsque la série  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$  est convergente, quelle que soit la suite de nombres  $\{t_n\}$  tendant vers 0. Ces théorèmes jouent un rôle dans la théorie des séries orthogonales (cf. M. W. Orlicz, l. c., Studia Math. 1 (1929), p. 241-255).

#### CHAPITRE X

§ 1. Au sujet de la théorie des équations linéaires, développée dans ce chapitre, voir F. Hausdorff, Zur Theorie der linearen Räume, Journ. f. reine u. angew. Math. 167 (1932), p. 294-311.

Les théorèmes de ce  $\S$  ont été démontrés dans le cas où  $E=E'=(L^2)$  par MM. E. Hellinger et O. Toeplitz (v. Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Encyklopedie der Math. Wiss., Leipzig 1923–1927). Dans les cas plus général où  $E=E'=(L^{(p)})$  avec p>1 les théorèmes 1 et 3 ont été établis par M. F. Riesz, I. c., Math. Ann. 69 (1910), p. 449–497 et pour  $E=E'=(l^{(p)})$  où p>1 par le même auteur dans son livre Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris 1913. Les théorèmes 2 et 4 pour  $E=E'=(L^{(p)})$  resp.  $(l^{(p)})$  où  $p\geqslant 1$  ont été démontrés par M. S. Saks, Remarques sur les fonctionnelles linéaires dans les champs  $L^p$ , Studia Mathematica 1 (1929), p. 217–222.

§ 2. Si on fait tomber dans le théorème 15, p. 145, l'hypothèse que l'opération U(x) est totalement continue, les équations en question peuvent ne pas avoir le nombre égal de solutions linéairement indépendantes. On peut cependant montrer que pour U=1 on a l'inégalité  $n \le v$  et qu'elle redevient égalité, lorsque, en outre, l'espace E est faiblement complet et tel que tous les ensembles bornés y sont faiblement compacts (v. S. Mazur, Über die Nullstellen linearer Operationen, Studia Math. 2 (1930), p. 11-20).

#### CHAPITRE XI

- § 2. Le plus ancien exemple connu d'une transformation isométrique des espaces du type (B) l'un dans l'autre est celui de la transformation isométrique de  $(L^2)$  en  $(l^2)$  qui s'obtient des théorèmes de Riesz-Fischer et Parseval-Fatou.
- § 3. On ignore si le théorème 2, p. 155, subsiste pour les espaces du type (F); suivant une remarque de MM. S. Mazur et S. Ulam, il devient toutefois faux pour les espaces du type (G). Les mêmes auteurs m'ont de plus signalé le corollaire suivant du théorème 2 en question: il n'est pas possible de définir dans un espace métrique E les opérations (d'addition des éléments et de multiplication par nombres) de deux manières différentes, de façon que dans les deux cas E devienne un espace vectoriel normé et que l'élément  $\Theta$  de E reste le même.
- § 4. On ne connaît aucun exemple de deux espaces du type (B) séparables, à une infinité de dimensions et qui ne soient homéomorphes; d'autre part, on ne sait pas démontrer que p. ex. (C) est homéomorphe à (c). Pareillement, on ne réussit pas d'établir l'homéomorphie entre (C) et (l). Or, les espaces  $(L^{(p)})$  et  $(l^{(q)})$  sont homéomorphes pour  $p \ge 1 \le q$  arbitraires (v). S. Mazur, Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels, Studia Math. 1 (1929), p. 83–85).

D'un intérêt particulier semble être la question si (C) est homéomorphe avec l'espace des fonctions continues définies dans le carré. On ne connait aucun exemple de deux espaces métriques compacts à un nombre fini, mais inégal, de dimensions (au sens de Menger-Urysohn) et tels que les espaces des fonctions continues définies dans eux soient homéomorphes.

- § 5. La notion de rotation est applicable d'une façon générale aux espaces du type (G). Il peut arriver que la seule rotation possible autour de  $\Theta$  y soit donnée par la transformation U(x) = x; dans les espaces du type (F) la transformation V(x) = -x est aussi une rotation autour de  $\Theta$ . Il existe des espaces du type (B) à une infinité de dimensions où il n'y a que ces deux rotations autour de  $\Theta$ . La forme générale (15) des rotations dans  $(L^2)$ , établie p. 161, (d'ailleurs connue dépuis longtemps), montre que pour tout couple d'éléments x et y à la norme 1 il y existe une rotation autour de  $\Theta$  qui transforme x en y. M. S. Mazur a posé la question si tout espace du type (B) séparable, ayant une infinité de dimensions et jouissant de cette propriété est isométrique avec  $(L^2)$ .
- $\S$  6. La notion d'isomorphie s'applique aussi aux espaces du type (G). Deux espaces du type (G) sont équivalents, lorsqu'il existe une transformation isométrique et *additive* de l'un en l'autre.

Soit pour deux espaces isomorphes E et  $E_1$  du type (B)

$$(E, E_1) = \text{borne inf} \left[\log \left(|U| \cdot |U^{-1}|\right)\right]$$

où U parcourt toutes les transformations biunivoques linéaires de E en  $E_1$ . Si  $(E,E_1)=0$ , les espaces E et  $E_1$  seront dits presque isométriques. Les espaces isométriques sont en même temps presque isométriques. La réciproque est vraie en tout cas pour les espaces à un nombre fini de dimensions, mais on ne sait pas réfuter l'hypothèse que P0 ex. les espaces P1 et P2 qui ne sont pas isométriques, soient presque isométriques.

Considérons l'ensemble  $J_E$  de tous les espaces qui s'obtiennent d'un espace donné E du type (B), lorsqu'on en remplace la norme par une norme équivalente quelconque. Il est évident que tout espace qui appartient à  $J_E$  est isomorphe avec E et que tout espace isomorphe avec E est isométrique avec un espace de l'ensemble  $J_E$ . Divisons  $J_E$  en sous-ensembles, en rangeant deux espaces dans le même sous-ensemble  $\iota$ , lorsqu'ils sont presque isométriques. Pour deux sous-ensembles  $\iota_1$  et  $\iota_2$  de  $J_E$  posons  $(\iota_1, \iota_2) = (E_1, E_2)$  où  $E_1$  et  $E_2$  sont des espaces arbitraires appartenant respectivement à  $\iota_1$  et  $\iota_2$ . On peut montrer que cette définition est univoque et que l'ensemble  $I_E$  de tous les  $\iota$ , ainsi métrisé, constitue un espace métrique complet. J'ai introduit ces notions en collaboration avec M. S. Mazur.

- § 7. On peut étudier aussi des produits infinis. Désignons par  $(E_1 \times E_2 \times \ldots)_{c_0}$  où  $E_1, E_2, \ldots$  sont des espaces du type (B) l'espace E du type (B) défini comme suit: les éléments de E sont toutes les suites  $\{x_n\}$  où  $x_n \subset E_n$  pour  $n=1,2,\ldots$  et telles que  $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|=0$ ; l'addition et la multiplication par nombres terme à terme; la norme  $\|\{x_n\}\|=\max_{1\le n<\infty} \|x_n\|$ . On définit d'une façon analogue p. ex. les espaces  $(E_1\times E_3\times\ldots)_c$ ,  $(E_1\times E_2\times\ldots)_m$  et  $(E_1\times E_2\times\ldots)_{l^p}$  où  $p\geqslant 1$ .
- § 8. P. Urysohn a été premier à démontrer l'existence d'un espace métrique séparable contenant des sous-espaces isométriques à tout espace métrique séparable donné d'avance (v. P. Urysohn, Sur un espace métrique universel, Bull. Sci. Math. 151 (1927), p. 1-38).
- § 9. On ne sait pas si l'équivalence des espaces  $\overline{E}_1$  et  $\overline{E}_2$  entraı̂ne toujours l'isomorphie des espaces  $E_1$  et  $E_2$  (cf. théorème 11, p. 171). La réciproque du théorème 12, p. 172, est évidemment fausse, mais on ignore s'il en est de même de la réciproque du théorème 13, p. 172, à savoir, si l'équivalence entre l'espace E du type (B) séparable et l'espace E entraı̂ne, oui ou non, l'existence dans toute suite bornée d'éléments de E d'une suite partielle faiblement convergente vers un élément de E, La question suivante reste aussi ouverte: étant donné un espace E du type (B) tel que l'espace conjugué E n'est pas séparable, existe-t-il dans E une suite bornée d'éléments ne contenant aucune suite partielle faiblement convergente?

#### CHAPITRE XII

Nous allons énumérer ici une série de propriétes isométriques. resp. isomorphes, resp. dimensionnelles, c.-à-d. qui se reproduisent, lorsqu'on passe d'un espace du type (B) qui en jouit à un espace quelconque isométrique, resp. isomorphe, resp. de dimension linéaire égale.

### Propriétés isométriques:

- (1) La convergence faible d'une suite d'éléments  $\{x_n\}$  vers l'élément  $x_0$ , jointe à l'égalité  $\lim_{n\to\infty}|x_n|=|x_0|$ , entraı̂ne  $\lim_{n\to\infty}|x_n-x_0|=0$ .
- (2)  $|x_0| = 1$  entraı̂ne l'existence d'une et d'une seule fonctionnelle linéaire f(x) telle que  $f(x_0) = 1$  et |f| = 1.

- (3) Isométrie de l'espace avec l'espace conjugué.
- (4) Isométrie de l'espace avec chaque sous-ensemble linéaire et fermé à une infinité de dimensions.
- (5) Isométrie entre tout couple de sous-ensembles linéaires à un nombre fini donné  $n \ge 2$  de dimensions.

#### Propriétés isomorphes:

- (6) Existence d'une base.
- (7) Existence pour tout sous-ensemble linéaire fermé S d'un sous-ensemble linéaire fermé T tel que tout élément x se laisse représenter d'une seule manière dans la forme x=s+t où  $s\subset S$  et  $t\subset T$ .
- (8) Existence pour tout sous-ensemble linéaire fermé S d'une transformation linéaire de l'espace entier en S entier.
- (9) Existence pour tout espace séparable E d'une transformation linéaire de l'espace donné en E tout entier.
  - (10) Isomorphie de l'espace avec l'espace conjugué.
  - (11) Isomorphie de l'espace avec son carré.

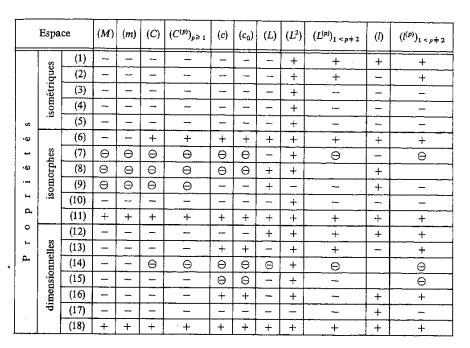
#### Propriétés dimensionnelles:

- (12) La propriété d'être faiblement complet.
- (13) Compacticité faible des sous-ensembles bornés.
- (14) Existence de la base dans tout sous-ensemble linéaire fermé.
- (15) Isomorphie de tous les sous-ensembles linéaires fermés à une infinité de dimensions.
- (16) Egalité de la dimension linéaire de tous les sous-ensembles linéaires fermés à une infinité de dimensions.
- (17) Equivalence entre la convergence faible des éléments et leur convergence suivant la norme.
  - (18) Egalité entre la dimension linéaire de l'espace et celle de son carré.

Sur le tableau qui suit la présence et l'absence connues de ces propriété dans divers espaces est désignée respectivement par + et -; les mailles libres correspondent aux problèmes ouverts, d'ailleurs pas faciles\*.

Comme l'a remarqué M. S. Mazur, il existe des espaces séparables à une infinité de dimensions qui, sans être isomorphes avec  $(L^2)$ , jouissent de la propriété (3), donc aussi de la propriété (10), tandis qu'il n'en existe aucun, du moins parmi les espaces connus, qui jouisse de la propriété (4), (5) ou (14). M. Mazur a démontré d'autre part, que tout espace séparable, à une infinité de dimensions et qui possède la propriété (5) pour n=2 est, réciproquement, isométrique avec  $(L^2)$ . La propriété (6) est en défaut dans tous les espaces non séparables, mais on ignore si tous les espaces séparables la possèdent. On ne sait non plus s'il existe un espace séparable à une infinité de dimensions qui, sans être isomorphe à  $(L^2)$ , (L) ou (l), posède la propriété (8). Les propriétés (11) et (18) se présentent pour tous les espaces connus à une infinité de dimensions; on ignore cependant s'il en est ainsi en général pour tous les espaces pareils. On ne sait ni démontrer, ni réfuter que tout espace séparable jouit de la propriété (14). Enfin, on ne connait aucun exemple d'espace à une infinité de dimensions qui, sans être isomorphe avec  $(L^2)$ , possède la propriété (15).

On remarquera qu'aucune des propriétés isométriques envisagées ici n'est propriété



isomorphe. Or, nous ne savons pas si toutes les propriétés isomorphes qui ont été énumérées ne sont en même temps propriétés dimensionnelles. Parmi les autres problèmes restés ouverts signalons les suivants:

1° Soient  $X_1(x)$  et  $X_2(x)$  deux fonctionnelles linéaires quelconques définies dans un espace E du type (B) à une infinité de dimensions et ne s'annulant pas identiquement.  $G_1$  et  $G_2$  désignant respectivement les ensembles des éléments de E où ces fonctionnelles s'annulant, on peut montrer que  $\dim_I(G_1) = \dim_I(G_2)$ ; or, est-il vrai que  $\dim_I(G_1) = \dim_I(E)$ ?

2º Les dimensions linéaires de deux espaces du type (B) étant supposées incomparables, est-il vrai qu'il en est de même de celles de leurs carrés?

Notons pour terminer quelques résultats de M. S. Mazur concernant la géométrie des espaces vectoriels normés.

E désignant un tel espace, appelons translation toute transformation isométrique de l'espace E en lui-même de la forme  $U(x) = x + x_0$ , où  $x_0 \subset E$ ; les ensembles s'obtenant par translation des ensembles linéaires s'appelleront variétés linéaires. Une variété linéaire  $H \neq E$  portera le nom d'hyperplan, lorsqu'il n'existe aucune variété linéaire fermée G telle que  $H \subset G \subset E$  et  $H \neq G \neq E$ . Nous dirons qu'un ensemble A est situé d'un coté de l'hyperplan H, lorsque tout segment unissant deux point de A-H est disjoint de H. Un ensemble C sera dit corps convexe, lorsqu'il est fermé, convexe et contient des points intérieurs. Un hyperplan H s'appellera plan d'appui ("Stützebene") du corps convexe C, lorsque C est situé d'un coté et à la distance C0 de C1 en particulier C2 points frontières de C3.

Ceci posé, on a le théorème: par tout point frontière  $x_0$  d'un corps convexe C passe un plan d'appui H de C (cf. G. Ascoli, Sugli spazi lineari..., Annali di Mathematica 10 (1932), p. 33-81). Il en résulte que tout ensemble convexe fermé est faiblement fermé. En d'autres termes: étant donnée une suite  $\{x_n\}$  de points de E, faiblement convergente vers  $x_0 = E$ , il existe des nombres non-négatifs  $c_i^{(n)}$  à indices naturels, tels que  $c_i^{(n)} = 0$  pour tout n

<sup>\*</sup> Les signes  $\oplus$  et  $\ominus$  correspondent aux résultats obtenus après la publication de la monographie de S. Banach, cf. l'article de A. Pelczyński (note de la Rédaction).



à partir d'un certain i et que la suite de points  $\{y_n\}$ , où  $y_n = \sum_{i=1}^n c_i^{(n)} x_i$  pour tout i à partir d'un certain n, converge vers le point x<sub>0</sub>. Cette dernière convergence a été obtenue par M. S. Mazur et moi d'abord par une autre voie.

En particulier, pour l'espace (C) elle a été établie aussi par MM. D. C. Gillespie et W. A. Hurwitz (v. On sequences of continuous functions having continuous limits. Transact. Amer. Math. Soc. 32 (1930), p. 527-543) et, indépendamment, par M. Z. Zalcwasser (v. Sur une propriété du champ des fonctions continues, Studia Mathematica 2 (1930), p. 63-67).

On peut montrer de plus que la condition nécessaire et suffisante pour la convergence faible d'une suite (bornée) de points  $\{x_n\}$  vers un point  $x_0$ , est que tout corps convexe (borné) contenant une infinité de points  $x_n$  contienne le point  $x_0$ .

### INDEX TERMINOLOGIQUE

Abelien (espace) 203 Accumulation (point d') 32, 287 Addition 42, 203 Additive fonctionnelle, opération 40 Analytique ensemble 35 Appui (plan d') 215 Associée équation 147, opération 101 Asymptotique convergence 25, limite 201

Base 110, de Hamel 205 Biorthogonale suite 107

Carré des espaces 167 Catégorie I-e, II-e, de Baire 32 Centre d'une sphère 32, d'un couple de points 155 Classe totale (d'opération linéaires) 54 Combinaison linéaire 43 Commutative convergence 211 Compact espace 30 Compacticité faible 126, 210 Complet espace, ensemble 29, faiblement 211, système biorthogonal 209 Complète suite d'éléments de (C) 79, de  $(L^{(r)})$ Condensation des singularités (théorème sur) 41. (principe de) 86 Condition de Baire pour ensembles 34, pour opérations 35, de Cauchy 29 Conjugué exposant 24 Conjuguée opération 101 Connexe (ensemble, espace) 39

nelle) 127, totalement (opération) 98

Contredomaine 34

120

Convexe corps 215, ensemble, espace 43, fonction 202 Corps convexe 215 Dense ensemble 32 Dérivé (ensemble) 32, faible 187, transfini 191 tion 87 Distance 29 Domaine 34 Entourage 32

Développment d'un élément 107, d'une fonc-Diamètre d'un ensemble 155 Dimension linéaire 176 Dimensionnelle (propriété) 213 Élément-zéro d'un espace 38 Élément propre (d'une équation) 147 Ensemble analytique ou (A) 35, 36, 207, connexe 39, convexe 43, compact 30, (faiblement) 126, 210, de I-e, de II-e catégorie 32, dense 32, (faiblement) 121, dérivé 32, (faible) 187, (transfini) 191, faiblement complet 211, fermé 32, (faiblement) 121, (régulièrement) 115, fondamental (d'éléments) 67, linéaire 42, mesurable (B) 34, (J), (L) 47, non dense 32, ouvert 32, parfait 32, total (d'éléments) 67, (de fonctionnelles) 54, vectoriel 42 Ensembles homéomorphes 158 Equations associées 147, symétriques 152 Equivalence (des espaces) 166, 212 Espace abelien 203, (C) 31,  $(C^{(p)})$  31, (c) 31, (c<sub>0</sub>) 166, compact 30, (faiblement) 210, com-Continue (opération) 34, faiblement (fonctionplet 29, conjugué 171, connexe 39, (D) 29, du type (B) 63, (F) 49, (G) 38,  $(H^{(p)})$  202, linéaire 42,  $(L^{(p)})$  31,  $(l^{(p)})$  32, (M) 30, (m)Convergence asymptotique 25, commutative 211, en mesure 25, en moyenne 25, faible 31, métrique 29, norme 63, (O) 201, (o) 202, (des éléments) 128. (des fonctionnelles) (O) 201, (R) 202, (S) 30, (s) 30, séparable 32. universel 171

Convergente série 51, suite 29, (d'opérations)

Espaces équivalents 166, 212, isométriques 154, Méthode de sommation normale 97, 208, par-(presque) 212, isomorphes 166 Exposants conjugués 24 Extension(1) d'une fonctionnelle 43

Faible convergence (des éléments) 128, (des fonctionnelles) 120, dérivé 187, limite 120, méthode de sommation 93

Faiblement compact (espace) 210, complet (espace) 211, continue (fonctionnelle 127, convergente (suite de fonctionnelles) 120, dense (ensemble de fonctionnelles linéaires) 121, fermé (ensemble de fonctionnelles linéaires) 121

Fermé (ensemble) 32

Fermée (suite d'éléments de (C), (L<sup>(r)</sup>)) 79 Fermeture d'un ensemble 32

Fonctionnelle 34, additive 40, 43, continue 34, (faiblement) 127, linéaire 40, non négative 194, orthogonale (à un élément ou un ensemble d'éléments) 67, propre (d'une équa-

Fondamental (ensemble d'éléments) 67

Glissante métrique 204 Groupe 38

Homéomorphie 158 Homogène (opération) 43 Hyperplan 215

Incomparables (dimensions) 176 Inversion (d'une opération linéaire) 50 Isométrie, isométrique espace, transformation 154, presque isométrique (espace) 213, propriété 213

Isomorphie 166, isomorphes espaces 166, propriétés 213

Lim, limite généralisée 47, 48, 208 Limite 29, asymptotique 201, des opérations 35, faible 120, 128, (point-) 29, transfinie 116, 117

Linéaire combinaison 43, dimension 176, ensemble, espace 42, opération 40, transformation 154, variété 215

Mesurable (B) ensemble 34, opération 35 Mesure (convergence en) 25

faite 93, permanente 93, plus faible que 93. reversible 93

Métrique (espace) 29 Métrique "glissante" 204 Moments (problème des) 81

Non dense (ensemble) 32 Non négative (fonctionnelle) 194 Normale (méthode de sommation 208, suite voir normée Norme d'un élément 63, d'une opération 64 Normé (espace) 63 Normée (2) suite 112, système 209

Opération 34, additive 40, associée ou conjuguée 101, continue 35, homogène 43, linéaire 40, mesurable (B) 34, symétrique 152, totalement continue 98

Parfait (ensemble) 32 Parfaite (méthode de sommation) 93 Permanente (méthode de sommation) 93 Plan d'appui 215 Point d'accumulation des éléments 32, des fonctionnelles 187 Point-limite 29 Presque isométriques espaces 213 Principe de condensation des singularités 86 Problème des moments 81 Produit des espaces 167 Prolongement (d'une fonctionnelle) voir exten-Propre élément, fonctionnelle, valeur (d'une

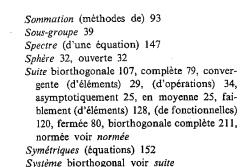
Régulière (valeur d'une équation) 147 Régulièrement fermé (ensemble de fonctionnelles) 115 Reversible (méthode de sommation) 93 Rotation 160

Propriété isométrique 213, isomorphe 213, di-

equation) 147

mensionnelle 213

Segment 43 Séparable (espaçe) 32 Série convergente 51, commutativement convergente 211 Singularité (condensation des) 41, 86



Total, ensemble d'éléments 67, de fonctionnelles 54

Totalement continue (opération) 98 Transfini (dérivé) 191 Transfinie (limite) 116 Transfiniment fermé (ensemble de fonctionnel-Transformation isométrique 154, linéaire 154 Translation 215

Universel (espace) 171, 213

Valeur d'une opération 34, propre d'une équation 147, régulière d'une équation 147 Variété linéaire 215 Vectoriel (ensemble, espace) 42 Voisinage (d'un point) 32

<sup>(1)</sup> Terme coincidant avec le terme classique "prolongement" pour les fonctions.

<sup>(2)</sup> Terme coincidant pour les suites orthogonales de fonctions avec le terme "normale".